

Aufgabe 1:

Zwei identische Zylinder (Massen M und Radien R) liegen in der Höhe h auf einer schiefen Ebene und werden gleichzeitig aus der Ruhe heraus losgelassen. Der eine Zylinder gleitet herab ohne zu rollen und der andere Zylinder rollt ohne zu gleiten herab.

Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse ist

$$J_S = \frac{1}{2}MR^2$$

- (a) Berechnen Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten des gleitenden Zylinders v_g und des rollenden Zylinders v_r am Ende der schiefen Ebene.
Warum sind diese Geschwindigkeiten unterschiedlich?
(Benützen Sie hierbei den Energieerhaltungssatz)
- (b) Begründen Sie, warum beide Körper eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ausführen.
Was kann man daraus qualitativ über die jeweiligen Zeiten schließen, die die beiden Zylinder hierzu benötigen?
- (c) Überlegen Sie sich aus den Lösungen für (a) und (b) eine einfache physikalische Versuchsanordnung für rollende Körper gleicher Masse und gleicher Gestalt (äußerlich nicht unterscheidbare Körper, z.B. Kugel-Hohlkugel oder Zylinder-Hohlzylinder), bei der man feststellen kann, welcher der beteiligten Körper das größere Massenträgheitsmoment besitzt.

Lösung:

(a) Die Gleitgeschwindigkeit v_g erhält man mit dem Energieerhaltungssatz zu:

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_g^2$$

also

$$v_g = \sqrt{2gh}$$

Abrollen bedeutet, dass sich der Zylinder ebenfalls noch um seine Symmetrieachse dreht. Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen Rollgeschwindigkeit und

Winkelgeschwindigkeit $v_r = R\omega$ oder $\omega = \frac{v_r}{R}$

Es kommt also noch ein Anteil von Rotationsenergie hinzu. Der Energieerhaltungssatz liefert:

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_r^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$$

Abrollbedingung eingesetzt

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_r^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{v_r}{R} \right)^2$$

Massenträgheitsmoment eingesetzt

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{v_r}{R} \right)^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_r^2 + \frac{1}{4} Mv_r^2$$

$$Mgh = \frac{3}{4} Mv_r^2$$

Somit ist die Rollgeschwindigkeit

$$v_r = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Das Verhältnis der Gleitgeschwindigkeit zur Rollgeschwindigkeit ist

$$\frac{v_g}{v_r} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{4}{3}gh}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$$

Die Gleitgeschwindigkeit ist also bei einem Zylinder ungefähr 1,22 mal größer als seine Rollgeschwindigkeit, dies liegt daran, dass Energie für die Rotation aufgebracht werden muss, was beim Gleiten nicht der Fall ist.

(b) Die beschleunigende Kraft ist bei einer schiefen Ebene immer konstant (Hangabtriebskraft), deshalb erhält man immer eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen (aus der Ruhe heraus) gilt:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = at$$

Elimination der Beschleunigung liefert

$$x(t) = \frac{1}{2}v(t) \cdot t$$

oder

$$t = \frac{2x(t)}{v(t)}$$

Da der zurückgelegte Weg $x(t)$ längs der schiefen Ebene bei dieser Anordnung immer derselbe ist, folgt für die Zeit folgende Proportionalität

$$t \sim \frac{1}{v(t)}$$

Unter Benutzung des Ergebnisses aus Teilaufgabe (a) erhält man

$$v_g(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot v_r(t) \approx 1,22 \cdot v_r(t)$$

Da die Geschwindigkeit beim Gleiten zu jedem Zeitpunkt größer ist als die beim Rollen, benötigt der rollende Körper mehr Zeit, um das Ende der schiefen Ebene zu erreichen.

(c) Abrollen bedeutet, dass sich der Körper ebenfalls noch um seine Symmetrieachse dreht. Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen Rollgeschwindigkeit und

Winkelgeschwindigkeit $v_r = R\omega$ oder $\omega = \frac{v_r}{R}$

Es kommt also noch ein Anteil von Rotationsenergie hinzu. Der Energieerhaltungssatz liefert:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_r^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Abrollbedingung eingesetzt

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_r^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v_r}{R}\right)^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_r^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}v_r^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2}\left(M + \frac{J}{R^2}\right)v_r^2$$

Somit gilt für die Rollgeschwindigkeit allgemein

$$v_r = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + \frac{J}{R^2}}} = \sqrt{2gh \frac{MR^2}{J + MR^2}} = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{J}{MR^2}}}$$

Da Masse M und Radius R immer gleich sein sollen, hängt die Rollgeschwindigkeit nur noch vom Massenträgheitsmoment J ab.

Je größer also J ist um so kleiner wird die Rollgeschwindigkeit v_r .

Das Massenträgheitsmoment kann man allgemein schreiben als $J = k \cdot MR^2$, wobei k eine positive, von der Geometrie und Massenverteilung abhängige, konstante Zahl ist.

Je größer also k ist um so größer ist das Massenträgheitsmoment J .

Somit gilt für die Rollgeschwindigkeit in Abhängigkeit von k

$$v_r = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+k}}$$

Somit wäre eine mögliche einfache Versuchsanordnung:

Man lässt zwei Zylinder (z. B. Vollzylinder und Hohlzylinder) gleicher Masse und mit gleichem Radius aus derselben Höhe gleichzeitig auf der schiefen Ebene losrollen. Derjenige mit dem größeren Massenträgheitsmoment kommt mit der geringeren Geschwindigkeit an, benötigt also mehr Zeit.

"Der, der zuletzt ankommt hat das größte Trägheitsmoment."

Beim masse- und radiusgleichen Hohlkörpern im Vergleich zu ihren Vollkörpern ist die Gesamtmasse weiter von der Drehachse weg angesammelt, sie haben also das größere Massenträgheitsmoment.

Einige k -Werte für Zylinder und Kugel:

$k = \frac{1}{2}$	Vollzylinder
$k = 1$	Hohlzylinder (dünnwandig)
$k = \frac{2}{5}$	Vollkugel
$k = \frac{2}{3}$	Hohlkugel (dünnwandig)

Lösung:

Der Schwerpunkt der Kugel befindet sich in ihrem Mittelpunkt.

Mit Hilfe der Geometrie folgt für die Schwerpunktsabsenkung:

$$\Delta h = (r + R) - (r + R)\cos\varphi = (r + R)(1 - \cos\varphi)$$

Beim Ablösen ist Normalkraft und Zentripetalkraft genau gleich groß

$$F_N = F_Z$$

also

$$F_N = Mg \cos\varphi \quad \text{und} \quad F_Z = M \frac{v^2}{r + R}$$

Die Geschwindigkeit v beim Ablösepunkt ist also

$$v^2 = (r + R)g \cos\varphi$$

Mit dem Energieerhaltungssatz folgt

$$Mg\Delta h = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Da die Kugel abrollt gilt: $\omega = \frac{v}{R}$

Und all dies in den Energieerhaltungssatz eingesetzt liefert

$$Mg\Delta h = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}v^2$$
$$2g\Delta h = \left(1 + \frac{J}{MR^2}\right)v^2$$

Obige Beziehungen für Δh und v^2 eingesetzt ergeben

$$2g(r + R)(1 - \cos\varphi) = \left(1 + \frac{J}{MR^2}\right)(r + R)g \cos\varphi$$

$$2 - 2\cos\varphi = \left(1 + \frac{J}{MR^2}\right)\cos\varphi$$

$$2 = \left(3 + \frac{J}{MR^2}\right)\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{3 + \frac{J}{MR^2}}$$

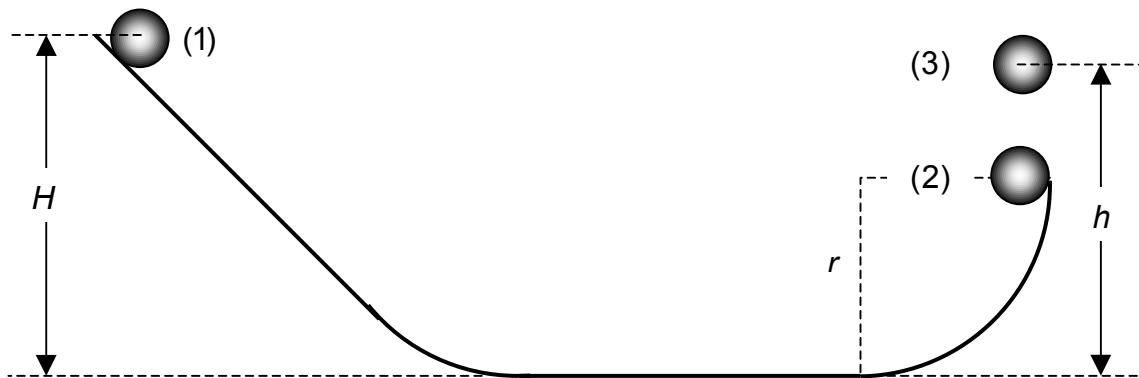
Würde der Körper gleiten (vgl. Aufgabe E 1, Physik-Grundkurs), so würde er sich bei folgender Bedingung lösen

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}$$

Rollt er, so löst er sich bei einem größeren Winkel (später), da

$$\cos\varphi = \frac{2}{3 + \frac{J}{MR^2}} < \frac{2}{3}$$

Aufgabe 3:



Eine Kugel (Masse m , Trägheitsmoment J bzgl. ihres Mittelpunktes, Radius R) rollt aus der Ruhe heraus ohne zu gleiten eine schiefe Ebene hinab um danach über einen Viertelkreis mit dem Radius r die Bahn in vertikaler Richtung zu verlassen. (Siehe Skizze)

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit v der Kugel beim Verlassen des Viertelkreises, also an der Stelle (2)?
- Welche Höhe h erreicht die Kugel nach Verlassen des Viertelkreises bezogen auf den Erdboden, also Stelle (3)?
- Warum erreicht die Kugel nicht mehr die Ausgangshöhe H ? Begründen Sie dies anhand ihrer Rechnungen von (a) und (b).

Lösung:

(a) Beim Rollen ohne zu gleiten gilt folgender Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω bei der Rotation um den Schwerpunkt und der Translationsgeschwindigkeit v des Schwerpunkts der Kugel.

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Der Energieerhaltungssatz zwischen (1) und (2) liefert

$$mgH = mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Rollbedingung eingesetzt ergibt

$$mgH = mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}v^2$$

$$2g(H - r) = \left(1 + \frac{J}{mR^2}\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2g(H - r)}{1 + \frac{J}{mR^2}}}$$

(a) und (c)

Der Energieerhaltungssatz zwischen (2) und (3) ergibt

$$mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Hierbei ist zu bemerken:

Beim Verlassen des Viertelkreises (2) wird die Rotation permanent aufrecht erhalten, d. h. auch im höchsten Punkt (3) rotiert die Kugel noch mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω , wie bei (2).

$$mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$mgh = mgr + \frac{1}{2}mv^2$$

$$h = r + \frac{v^2}{2g}$$

Von Aufgabenteil (a) lässt sich über H folgende Aussage machen:

$$mgH = mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}v^2$$

$$H = \underbrace{r + \frac{v^2}{2g}}_{=h} + \underbrace{\frac{J}{mR^2} \cdot \frac{v^2}{2g}}_{>0}$$

Man sieht folglich sehr leicht, dass $h < H$ ist.

Aufgabe 4:

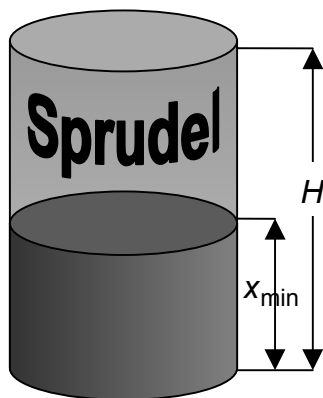
Eine zylindrische Sprudeldose habe leer die Masse M . Wenn sie ganz gefüllt ist, also bis zur Höhe H , so habe der gesamte Sprudel die Masse m .

- In welcher Höhe liegt der Schwerpunkt der leeren Dose?
- In welcher Höhe befindet sich der Schwerpunkt der bis zum Rand gefüllten Dose?
- Überlegen Sie sich mit Hilfe der Lösungen von (a) und (b), warum der Gesamtschwerpunkt bei einer bestimmten Füllhöhe am tiefsten liegt.
- Bei welcher minimalen Flüssigkeitshöhe x_{\min} (vom Boden aus gemessen) liegt der Gesamtschwerpunkt (Dose-Sprudel) am tiefsten?

Hinweis zu (c):

Die Masse der Flüssigkeit $m(x)$ nimmt linear mit der Füllhöhe x zu.

$$m(x) = \frac{m}{H} x$$



Lösung:

Die Masse der zylindrischen Dose ist konstant und beträgt M .

Aus Symmetriegründen liegt der Dosenschwerpunkt auf der halben Höhe

$$x_D = \frac{H}{2}$$

Die Masse der Flüssigkeit hängt jedoch von der Flüssigkeitshöhe x ab (vom Boden $x = 0$ nach oben gemessen). Ein linearer Zusammenhang zwischen Masse und Flüssigkeitshöhe liefert:

$$\left. \begin{array}{l} m(0) = 0 \\ m(H) = m \end{array} \right\} m(x) = \frac{m}{H} x$$

Der Schwerpunkt der Flüssigkeitssäule – ebenfalls zylinderförmig – liegt aus

Symmetriegründen in der Mitte, also bei $x_F = \frac{x}{2}$.

Betrachtet man nun beide 'Teilkörper' (Dose und Flüssigkeitssäule) als punktförmig, mit ihrer Masse jeweils im jeweiligen Schwerpunkt konzentriert, so ergibt sich für den Gesamtschwerpunkt x_S dieser Anordnung:

$$m_{\text{ges}} \cdot x_S = m(x) \cdot \frac{x}{2} + M \cdot \frac{H}{2} \quad \text{mit } m_{\text{ges}} = m(x) + M = \frac{m}{H} x + M$$

$$\left(\frac{m}{H} x + M\right) \cdot x_S = \frac{m}{H} x \cdot \frac{x}{2} + M \cdot \frac{H}{2}$$

nach x_S aufgelöst folgt:

$$x_S = \frac{\frac{m}{H} x \cdot \frac{x}{2} + M \cdot \frac{H}{2}}{\frac{m}{H} x + M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + \frac{M}{m} \cdot H^2}{x + \frac{M}{m} H}$$

Zwischenüberlegung:

Ist die Dose ganz gefüllt, so ist der Gesamtschwerpunkt bei $x_S = \frac{H}{2}$

Ist die Dose ganz leer, so ist der Gesamtschwerpunkt ebenfalls bei $x_S = \frac{H}{2}$

Wenn die Flüssigkeitssäule aber abnimmt so wird der Gesamtschwerpunkt nach unten verschoben, bis die Flüssigkeitssäule kaum mehr eine Rolle spielt, dann wird der Gesamtschwerpunkt wieder gehoben.

Es gilt also: $0 \leq x_S \leq \frac{H}{2}$ und $0 \leq x \leq H$

x ist der Flüssigkeitsstand vom Boden aus gemessen.

Gefragt ist nun bei welchem x die Größe x_S minimal wird.

Nach der Differentialrechnung muß also *notwendigerweise* die erste Ableitung der Schwerpunktshöhe x_S nach dem Flüssigkeitsstand x verschwinden.

Die *hinreichende Bedingung* für ein Minimum erfüllt die Zwischenüberlegung von oben.

Bedingung:

$$\frac{dx_S}{dx} = 0$$

Mit der Quotientenregel folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dx_S}{dx} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x) \cdot \left(x + \frac{M}{m}H\right) - (1) \cdot \left(x^2 + \frac{M}{m}H^2\right)}{\left(x + \frac{M}{m}H\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2 + 2\frac{M}{m}Hx - x^2 - \frac{M}{m}H^2}{\left(x + \frac{M}{m}H\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 2\frac{M}{m}Hx - \frac{M}{m}H^2}{\left(x + \frac{M}{m}H\right)^2} \end{aligned}$$

Minimalitätsbedingung liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 2\frac{M}{m}Hx - \frac{M}{m}H^2}{\left(x + \frac{M}{m}H\right)^2} \\ x^2 + 2\frac{M}{m}Hx - \frac{M}{m}H^2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-2\frac{M}{m}H \pm \sqrt{\left(2\frac{M}{m}H\right)^2 + 4\frac{M}{m}H^2}}{2} = \frac{-2\frac{M}{m}H \pm \sqrt{4\left(\frac{M}{m}\right)^2 H^2 + 4\frac{M}{m}H^2}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{-2\frac{M}{m}H \pm \sqrt{4\left(\frac{M}{m}H\right)^2 \left(\frac{m}{M} + 1\right)}}{2} = \frac{-2\frac{M}{m}H \pm 2\frac{M}{m}H \sqrt{\frac{m}{M} + 1}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{M}{m}H \left(\pm \underbrace{\sqrt{\frac{m}{M} + 1}}_{>1} - 1 \right) \\ x_1 &= \frac{M}{m} \left(\sqrt{\frac{m}{M} + 1} - 1 \right) \cdot H \\ (x_2 &= \frac{M}{m} \left(-\sqrt{\frac{m}{M} + 1} - 1 \right) \cdot H < 0) \end{aligned}$$

Negatives Vorzeichen in der Mitternachtsformel macht keinen Sinn, da sonst $x < 0$ werden würde.

Der Flüssigkeitsstand, bei dem der Schwerpunkt am tiefsten liegt ist also:

$$x_{\min} = \frac{M}{m} \left(\sqrt{\frac{m}{M} + 1} - 1 \right) \cdot H$$

Je tiefer der Schwerpunkt umso stabiler ist der Stand der Dose.

Rechenbeispiel:

Überschlagsrechnung

Leere 0,33 l Alu-Dose: $M \approx 10 \text{ g} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$

0,33 l Flüssigkeit: $m \approx 0,33 \text{ kg}$

$$\frac{M}{m} \approx 0,03$$

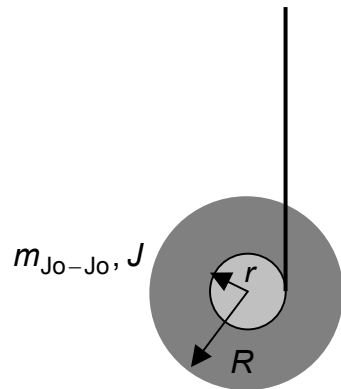
$$\frac{m}{M} \approx 33$$

$$\Rightarrow x_{\min} = 0,03(\sqrt{34} - 1) \cdot H \approx 0,145 \cdot H$$

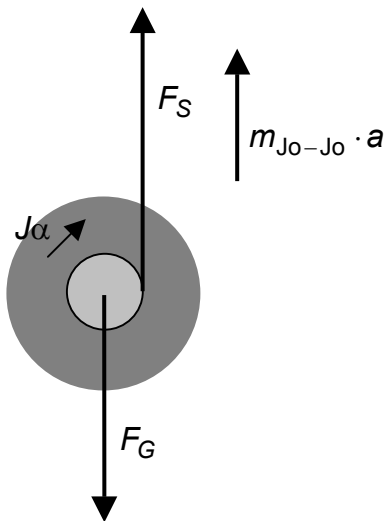
Aufgabe 5:

Ein Jo-Jo der Masse $m_{\text{Jo-Jo}}$ und des Trägheitsmomentes J bezüglich seiner Drehachse hat den Außenradius R und den Innenradius r .

- Schneiden Sie das Jo-Jo frei und machen Sie eine dynamische Kräfte- und Momentenbilanz.
- Bestimmen Sie die Beschleunigung a des Jo-Jos.



Lösung:



Die Kräftebilanz liefert:

$$m_{\text{Jo-Jo}} \cdot a + F_S = F_G$$

Die Momentenbilanz liefert:

$$J\alpha = F_S \cdot r$$

Die Abrollbedingung lautet: $\alpha r = a$

Somit folgt für die Momentenbilanz:

$$F_S = \frac{J}{r^2} a$$

Dies in die Kräftebilanz eingesetzt liefert:

$$m_{\text{Jo-Jo}} \cdot a + \frac{J}{r^2} \cdot a = m_{\text{Jo-Jo}} \cdot g$$

$$(m_{\text{Jo-Jo}} + \frac{J}{r^2}) \cdot a = m_{\text{Jo-Jo}} \cdot g$$

$$(1 + \frac{J}{m_{\text{Jo-Jo}} \cdot r^2}) \cdot a = g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{J}{m_{\text{Jo-Jo}} \cdot r^2}} \cdot g$$

Aufgabe 6

Die neugierige Nora ($m_N = 58 \text{ kg}$) möchte gerne wissen, wie schwer ihr Freund Manfred (m_M) nach seiner Dät noch ist. Dazu lädt sie ihn auf eine Kanufahrt mit ihrem $m_K = 30 \text{ kg}$ schweren Kanu ein. Ihre Plätze befinden sich im Abstand $L = 3 \text{ m}$ voneinander entfernt und liegen symmetrisch zur Kanumitte, wo sich auch der Schwerpunkt des Kanus befindet.

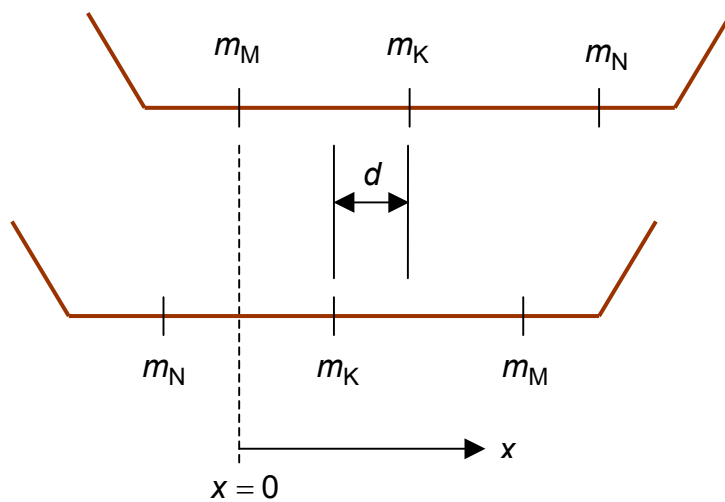
Inmitten des Sees befindet sich nun der Mittelpunkt des ruhenden Kanus genau neben einer fest verankerten Boje. Nora fordert ihren Manfred auf, mit ihr die Plätze zu tauschen. Nach diesem recht wackeligen Manöver hat sich die Kanumitte bezüglich der Boje um $d = 40 \text{ cm}$ bewegt.

- (a) In welche Richtung hat sich die Kanumitte bei diesem Manöver bewegt?
- (b) Berechnen Sie die Masse von Manfred.

Hinweis:

Von Reibungseinflüssen zwischen Wasser und Kanu kann abgesehen werden. Der See besitzt keine Strömung.

Lösung



(a) Der Mittelpunkt des Kanus bewegt sich in die Richtung, in der Manfred ursprünglich saß.

(b) Mit dem Satz der Erhaltung des Gesamtschwerpunkts folgt für oben aufgeführte Geometrie

$$m_K \frac{L}{2} + m_M L = -m_N d + m_K \left(\frac{L}{2} - d\right) + m_M (L - d)$$

$$m_M = \frac{m_N(L + d) + m_K d}{L - d} = 80,5 \text{ kg}$$

Aufgabe 7

Ein Güterwagen der Masse $m_1 = 25000 \text{ kg}$ fährt gegen einen stehenden Personenwagen und kuppelt an diesen an. Bei diesem Manöver werden 30 % der kinetischen Energie des Güterwagens in nicht-mechanische Energieformen umgewandelt.

Berechnen Sie die Masse m_2 des Personenwagens.

Lösung

Mit dem Impulserhaltungssatz folgt

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u$$

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Energie vor dem Stoß

$$E_{\text{kin}}^{\text{vor}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Energie nach dem Stoß

$$E_{\text{kin}}^{\text{nach}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2$$

Wenn 30 % der Energie verlorengehen, dann sind noch 70 % vorhanden.

Bedingung:

$$E_{\text{kin}}^{\text{nach}} = 0,7 \cdot E_{\text{kin}}^{\text{vor}}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 = 0,7 \cdot \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Impulsbedingung eingesetzt

$$E_{\text{kin}}^{\text{nach}} = 0,7 \cdot E_{\text{kin}}^{\text{vor}}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2 = 0,7 \cdot \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = 0,7$$

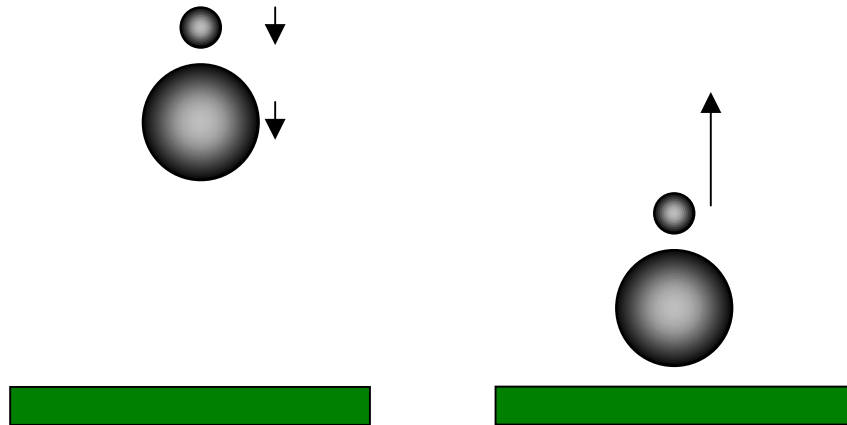
$$m_1 = 0,7 m_1 + 0,7 m_2$$

$$m_2 = \frac{0,3}{0,7} m_1 = 10714 \text{ kg}$$

Aufgabe 8

Ein kleiner Ball der Masse m wird so über einen größeren Ball mit der Masse M gehalten, dass zwischen den beiden Bällen ein sehr kleiner Abstand bleibt. Dann werden beide Bälle gleichzeitig aus einer Höhe h fallen gelassen (nehmen Sie hierbei an, dass die Radien der Bälle gegenüber der Höhe zu vernachlässigen sind).

Der größere Ball prallt völlig elastisch auf den Boden, der kleinere Ball anschließend völlig elastisch auf den größeren Ball (vgl. Skizze).



- (a) Wie muss das Massenverhältnis $\mu = \frac{m}{M}$ gewählt werden, damit der große Ball beim ersten Zusammenstoß mit dem kleinen Ball zum Stillstand kommt?
- (b) In welche Höhe h^* springt der kleine Ball nach dem ersten Zusammenstoß?

Lösung

(a) Nach Durchfallen der Höhe h haben beide Bälle die Geschwindigkeit $v = +\sqrt{2gh}$.

Der größere Ball kehrt seine Richtung beim Aufprall auf den Boden um, und somit gilt für die Geschwindigkeiten der beiden Bälle vor dem Stoß

$$v_m = \sqrt{2gh} \quad \text{nach unten}$$

$$v_M = -\sqrt{2gh} \quad \text{nach oben}$$

Nach dem Stoß soll der größere Ball zum Stillstand kommen, also $u_M = 0$

Der Impulserhaltungssatz liefert

$$mv_m + Mv_M = mu_m$$

$$\sqrt{2gh} \cdot (m - M) = mu_m$$

Division durch M und Einführung des Massenverhältnisses μ

$$[1] \quad \sqrt{2gh} \cdot (\mu - 1) = \mu u_m$$

Der Energieerhaltungssatz liefert

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}mu_m^2$$

Geschwindigkeiten eingesetzt

$$gh(m + M) = \frac{1}{2}mu_m^2$$

Division durch M und Einführung des Massenverhältnisses μ

$$[2] \quad gh(\mu + 1) = \frac{1}{2}\mu u_m^2$$

Quadrieren von [1] liefert

$$[3] \quad gh \cdot (\mu - 1)^2 = \frac{1}{2}\mu^2 u_m^2$$

Division von [3] durch [2] liefert

$$\frac{(\mu - 1)^2}{\mu + 1} = \mu$$

$$\mu^2 - 2\mu + 1 = \mu^2 + \mu$$

$$\mu = \frac{1}{3}$$

Damit in [1]

$$u_m = \frac{\mu - 1}{\mu} \sqrt{2gh} = -2\sqrt{2gh} \quad \text{nach oben}$$

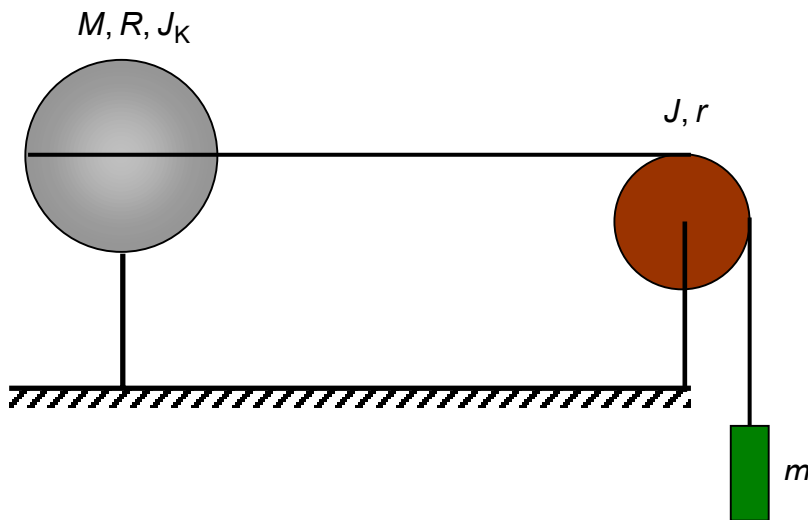
(b) Mit dem Energieerhaltungssatz folgt

$$\frac{1}{2}mu_m^2 = mgh^*$$

$$h^* = \frac{u_m^2}{2g} = 4h$$

Aufgabe 9

Eine homogene Kugel mit der Masse M und dem Radius R rotiert reibungsfrei gelagert um eine senkrechte Achse (vgl. Skizze). Ein masseloser Bindfaden, der wie skizziert um den Durchmesser der Kugel gelegt ist, läuft über eine Rolle mit dem Trägheitsmoment J und dem Radius r . An seinem Ende ist ein Massestück der Masse m befestigt. Die Rolle ist ebenfalls reibungsfrei gelagert, und zwischen Rolle und Bindfaden tritt kein Schlupf auf.



- (a) Geben Sie das Massenträgheitsmoment der Kugel an.
(b) Welche Geschwindigkeit v besitzt das Massestück m , nachdem es aus der Ruhelage heraus eine Höhendifferenz von h durchlaufen hat?
(Benützen Sie den Energieerhaltungssatz)

Lösung

(a) Das Massenträgheitsmoment der Kugel bezüglich seiner Drehachse durch den Schwerpunkt ist $J_K = \frac{2}{5}MR^2$

(b) Mit dem EES folgt

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega_r^2 + \frac{1}{2}J_K\omega_R^2$$

Rollen ohne Schlupf koppelt die Rotationsgrößen mit den Translationsgrößen

$$\omega_r = \frac{v}{r} \quad \text{und} \quad \omega_R = \frac{v}{R}$$

Dies eingesetzt

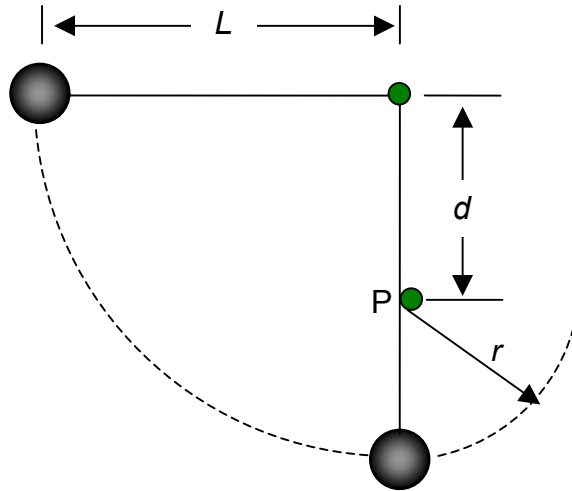
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\frac{v^2}{R^2}$$

$$mgh = \frac{1}{2}v^2\left(m + \frac{J}{r^2} + \frac{2}{5}M\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J}{r^2} + \frac{2}{5}M}}$$

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass $d > \frac{3}{5}L$ gelten muss, damit der Ball einmal vollständig um den Pflock P herumschwingt (vgl. Skizze).



Lösung

Damit der Ball einen Looping schafft muss die Gewichtskraft gerade die erforderliche Zentripetalkraft aufbringen, d.h. die Geschwindigkeit im obersten Punkt des Loopings wird dadurch festgelegt

$$F_G = F_Z$$

$$mg = m \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = gr$$

Die Geometrie fordert $L - d = r$

Mit dem EES folgt

$$mgL = mg2r + \frac{1}{2}mv^2$$

$$2L = 4(L - d) + (L - d)$$

$$2L = 4L - 4d + L - d$$

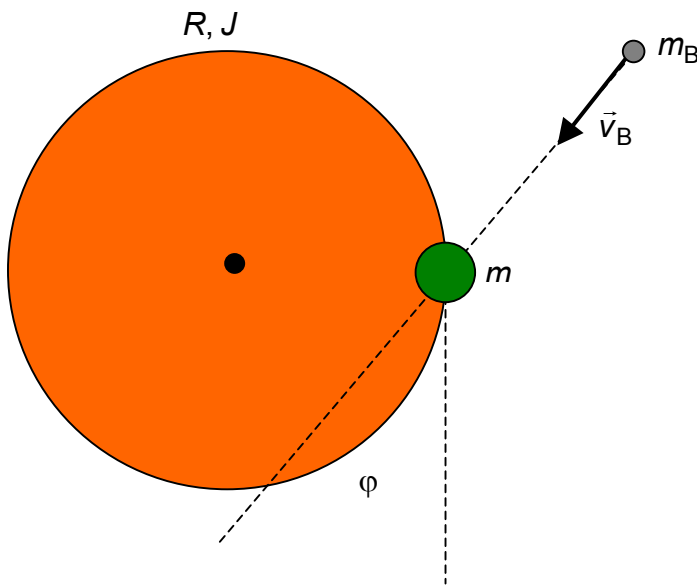
$$5d = 3L$$

$$d = \frac{3}{5}L$$

Aufgabe 11

Ein Kind der Masse $m = 30 \text{ kg}$ steht auf dem Rand eines unbewegten Karussells (Radius $R = 2,0 \text{ m}$, Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse $J = 150 \text{ kgm}^2$). Das Kind fängt einen Ball, der $m_B = 1 \text{ kg}$ schwer ist, den ihm ein Freund zugeworfen hat. Kurz vor dem Auffangen hat der Ball eine Geschwindigkeit $\vec{v}_B = 12 \text{ ms}^{-1}$ und trifft unter einem Winkel von $\varphi = 30^\circ$ bezüglich der Tangente am Rand des Karussells ein (vgl. Skizze – Draufsicht).

Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω des Systems Karussell-Kind-Ball unmittelbar nach dem Auffangen des Balls.



Lösung

Der Drehimpuls vor dem Auffangen wird lediglich vom Ball bestimmt.

Dabei geht nur die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit ein, da nur diese senkrecht zum Radiusvektor ist.

$$L_{\text{vor}} = m_B R v_B \cos \varphi$$

Der Drehimpuls nach dem Auffangen wird beschrieben durch

$$L_{\text{nach}} = [(m + m_B)R^2 + J]\omega$$

(Hierbei wurden Ball und Kind als punktförmige Massen angesehen.)

Mit dem Drehimpulserhaltungssatz folgt

$$L_{\text{vor}} = L_{\text{nach}}$$

$$m_B R v_B \cos \varphi = [(m + m_B)R^2 + J]\omega$$

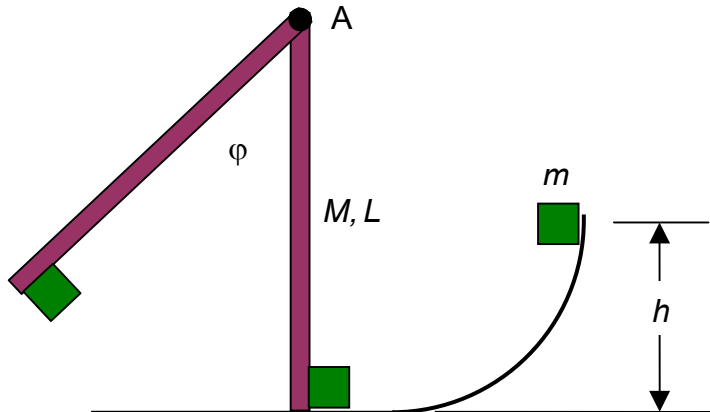
$$\omega = \frac{m_B R v_B \cos \varphi}{(m + m_B)R^2 + J} = 0,076 \frac{1}{\text{s}}$$

Aufgabe 12

Ein Körper der Masse m gleitet reibungsfrei eine gekrümmte Fläche der senkrecht gemessenen Höhe h hinab (vgl. Skizze). Er stößt auf ein Ende eines senkrecht aufgehängten, homogenen Stabs der Masse M und der Länge L , an dem er haften bleibt.

Der Stab dreht sich um einen Winkel φ um den Aufhängepunkt A, bevor er am Umkehrpunkt kurzzeitig zum Stillstand kommt.

Bestimmen Sie den Winkel φ .



Lösung

Die Auftreffgeschwindigkeit v des Körpers auf den Stab ist mit EES

$$v = \sqrt{2gh}$$

Das Trägheitsmoment des Stabes bezüglich des Drehpunkts A

$$J_A = \frac{1}{3}ML^2$$

Der Gesamtschwerpunkt des Systems Stab-Körper befindet sich im Abstand

$$x_S = \frac{mL + M\frac{L}{2}}{m + M} = \frac{m + \frac{1}{2}M}{m + M}L$$

vom Drehpunkt A.

Drehimpulserhaltung beim Stoß fordert (Körper wird als punktförmig betrachtet)

$$mLv = (J_A + mL^2)\omega$$

$$mL\sqrt{2gh} = \left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{m\sqrt{2gh}}{\left(\frac{1}{3}M + m\right)L}$$

EES: Die Rotationsenergie des Systems Stab-Körper wird vollständig in potentielle Energie umgewandelt. (Aufpassen: Es geht die SCHWERPUNKTSERHÖHUNG ein.)

$$(m + M)gx_S(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}(J_A + mL^2)\omega^2$$

$$(m + M)g \frac{m + \frac{1}{2}M}{m + M}L(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M + m\right)L^2 \frac{m^2 2gh}{\left(\frac{1}{3}M + m\right)^2 L^2}$$

$$\left(m + \frac{1}{2}M\right)L(1 - \cos \varphi) = \frac{m^2 h}{\frac{1}{3}M + m}$$

$$\frac{1}{2}(2m + M)L(1 - \cos \varphi) = \frac{m^2 h}{\frac{1}{3}(M + 3m)}$$

$$1 - \cos \varphi = \frac{6m^2 h}{L(M + 3m)(2m + M)}$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{6m^2 h}{L(M + 3m)(2m + M)}$$