Matheübungsaufgaben zum Mechanik - Grundkurs

Jürgen Gilg[1]
Austr. 59
70376 Stuttgart

Januar 2004

[1]Tel.: 0711/59 27 88, E-Mail: gilligan01@worldonline.de

Aufgabe 1:

Stellen Sie folgende Gleichungen nach den geforderten Größen um und prüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer Dimensionsanalyse:

a) Lösen Sie nach t und a auf
$$v = v_0 - at$$

b) Lösen Sie nach t auf
$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

c) Lösen Sie nach a auf
$$m_1g + m_1a - m_2g + m_2a = 0$$

d) Lösen Sie nach x auf
$$m_B\frac{L}{2} = m_M(L - x) + m_B(\frac{L}{2} - x)$$

e) Lösen Sie nach a auf
$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g - \frac{J}{r^2}a$$

f) Lösen Sie nach x auf
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_E^2$$

g) Lösen Sie nach p_2, V_1 und κ auf
$$p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa$$

h) Lösen Sie nach A_2, A_1 und v_1 auf
$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$$

i) Lösen Sie nach η auf
$$\rho_{\mathrm{Fl}}gV_K - \rho_KgV_K + 6\pi\eta rv = 0 \text{ unter der Bedingung } V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$$

j) Lösen Sie nach v auf
$$\rho_{\mathrm{Fl}}gV_K - \rho_KgV_K + \frac{1}{2}cA\rho_{\mathrm{Fl}}v^2 = 0$$

Aufgabe 2:

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $0,61 = 3,86\,t - 4,905\,t^2$

b) $2,5 \cdot 10^6\,x^4 + 5 \cdot 10^2\,x^2 = 0,3$

Aufgabe 3:

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

a) Bestimmen Sie u_1 und u_2
$$60 = u_1 + 5u_2$$
$$650 = u_1^2 + 5u_2^2$$

b) Bestimmen Sie u und ω
$$2 = u + 20\omega$$
$$4 = u^2 + 40\omega^2$$

Aufgabe 4:

Rechnen Sie folgende Ausdrücke in SI-Einheiten (kg, m, s) um und folgern Sie daraus, um welche physikalische Größe es sich jeweils handelt:

a) $1,6 \cdot 10^5 \sqrt{\dfrac{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}} \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m}^3}{\mathrm{km}^2 \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}}}$

b) $3,2 \cdot 10^{-2} \sqrt{\dfrac{\mathrm{bar} \cdot \mathrm{m}^4}{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{min}^2}}}$

Aufgabe 5:

Stellen Sie folgende Integralgleichungen nach den geforderten Größen um:

a) Lösen Sie nach v_E auf

$$\int_{v_0}^{v_E} dv = \int_0^{T_0} \left(\frac{F_0}{m} - \frac{F_0}{mT_0} t \right) dt$$

b) Lösen Sie nach x_0 auf

$$\int_{x_0}^{x_E} dx = \int_0^{T_0} \left(v_0 e^{-\frac{t}{T_0}} \right) dt$$

c) Lösen Sie nach F_0 auf

$$\int_{v_0}^{v_E} m\, dv = \int_0^{T_0} \left(\frac{F_0}{2} \left(1 - \cos(\pi \frac{t}{T_0}) \right) \right) dt$$

Aufgabe 6:

Folgende Körper sollen berechnet werden:

a) Bestimmen Sie das Volumen einer Kugel mit dem Radius $r = 3\,\mathrm{cm}$ (mit dem Durchmesser $d = 8\,\mathrm{cm}$).

b) Bestimmen Sie das Volumen einer Hohlkugel mit dem Außenradius $r_a = 5\,\mathrm{cm}$ und der Wandstärke $\Delta r = 3\,\mathrm{mm}$.

c) Bestimmen Sie das Volumen eines Zylinders mit dem Radius $r = 3,5\,\mathrm{cm}$ und der Höhe $h = 5\,\mathrm{mm}$.

d) Bestimmen Sie das Volumen eines Hohlzylinders mit dem Außenradius $r_a = 8,5\,\mathrm{cm}$, der Höhe $h = 10,3\,\mathrm{cm}$ und der Wandstärke $\Delta r = 8\,\mathrm{mm}$.

e) Gegeben ist eine homogene Stahlkugel der Dichte $\rho = 7500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und der Masse $m = 5\,\mathrm{kg}$. Wie groß ist ihr Durchmesser d ?

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte P und Q

a) $P(-1/3)$ und $Q(2/6)$

b) $P(a/0)$ und $Q(0/b)$

Verständnisfragen

Aufgabe 8:

Man skizziere das Schaubild irgendeiner beliebigen Funktion $f(x)$.

a) Was berechnet man dann mit dem Integral $\int\limits_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$?

b) Muß man notwendigerweise integrieren, wenn man eine Fläche berechnen möchte, die lediglich durch Geraden berandet ist?
Welche ebenen geometrischen Figuren können hierbei nur entstehen?
Wie berechnet man deren Flächeninhalt?

c) Was berechnet man mit der ersten Ableitung $f'(x_0)$ (andere Schreibweise: $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$) ?

Anwendung auf die Physik

Aufgabe 9:

Was mißt die Fläche unterhalb des

a) v, t-Diagramms (ω, t-Diagramms)?

b) a, t-Diagramms (α, t-Diagramms)?

c) F, t-Diagramms (M, t-Diagramms)?

d) p, V-Diagramms?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $t = \frac{v_0 - v}{a}$, $a = \frac{v_0 - v}{t}$

b) $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$

c) $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$

d) $x = \frac{m_M}{m_B + m_M} L$

e) $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} g$

f) $x = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v_E^2}{c}}$

g) $p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa$, $V_1 = V_2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$, $\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}$

h) $A_2 = A_1 \sqrt{\frac{1}{\frac{2\Delta p}{\rho v_1^2} + 1}}$, $A_1 = A_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho v_1^2} + 1}$, $v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}}$

i) $\eta = \frac{2 g r^2 (\rho_K - \rho_{\text{Fl}})}{9v}$

j) $v = \sqrt{\frac{2(\rho_K - \rho_{\text{Fl}}) g V_{\text{K}}}{c A \rho_{\text{Fl}}}}$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) $t_1 = 0,219$, $t_2 = 0,568$

b) $x_1 = 1,61 \cdot 10^{-2}$, $x_1 = -1,61 \cdot 10^{-2}$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $u_{11} = 3,55$, $u_{21} = 16,45$, $u_{12} = 11,29$, $u_{22} = 8,71$

b) $u_1 = 2$, $\omega_1 = 0$, $u_2 = -\frac{18}{11}$, $\omega_2 = \frac{2}{11}$

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also Geschwindigkeit v

b) $19,2\,\text{m}^2$, also Fläche A

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $v_E = v_0 + \frac{F_0}{2m}T_0$

b) $x_0 = x_E - v_0 T_0 (1 - \frac{1}{e})$

c) $F_0 = \frac{2m(v_E - v_0)}{T_0(1 - \frac{1}{\pi})}$

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \ldots = 113{,}1\,\text{cm}^3$, $V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{6}\pi d^3 = \ldots = 268{,}1\,\text{cm}^3$

b) $V_{\text{Hohlkugel}} = \frac{4}{3}\pi(r_a^3 - (r_a - \Delta r)^3) = \ldots = 88{,}7\,\text{cm}^3$

c) $V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 h = \ldots = 19{,}2\,\text{cm}^3$

d) $V_{\text{Hohlzylinder}} = \pi(r_a^2 - (r_a - \Delta r)^2)h = \ldots = 419{,}4\,\text{cm}^3$

e) $d = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi\rho}} = \ldots = 10{,}8\,\text{cm}$

Lösung zu Aufgabe 7:

a) $y = x + 4$

b) $y = -\frac{b}{a}x + b$

Lösung zu Aufgabe 8:

a) Das Integral mißt die Differenz der Flächen oberhalb zu unterhalb der x-Achse.

b) Nein, man kann es auch geometrisch berechnen. Es können ebene Figuren wie Dreiecke, Rechtecke und Trapeze entstehen.
$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}gh_g$
$A_{\text{Rechteck}} = ab$
$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2}(a + c)h$

c) Die 1. Ableitung mißt die Steigung der Tangente im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ des Schaubilds von $f(x)$.

Lösung zu Aufgabe 9:

a) Es wird die Ortsänderung (Winkeländerung) gemessen.

b) Es wird die Geschwindigkeitsänderung (Winkelgeschwindigkeitsänderung) gemessen.

c) Es wird die Impulsänderung (Drehimpulsänderung) gemessen.

d) Es wird der Betrag der mechanischen Arbeit gemessen.