Musteraufgaben zur Kinematik

Jürgen Gilg
Austr. 59
70376 Stuttgart
Tel.: 0711/59 27 88
E-Mail: gilligan01@worldonline.de

Januar 2004

Aufgabe 1:

Ein PKW fährt auf einer geradlinigen Autobahn mit der Geschwindigkeit v_0. Seine Bremsverzögerung ist gegeben durch $b = -b_0(1 - v/v^*)$, wobei v^* eine Konstante ist, die wesentlich größer ist als die maximal mögliche Geschwindigkeit.

a) Welches ist der Bremsweg des Fahrzeugs?

b) Ein zweites Fahrzeug mit gleichem Bremsverhalten fährt mit der höheren Geschwindigkeit $v_1 = v_0 + \Delta v_0$ hinter dem ersten Fahrzeug her. Es beginnt seinen Bremsvorgang $\Delta t = 1\,s$ später. Welchen Abstand Δs müssen die beiden Fahrzeuge haben, damit es nicht zu einer Kollision kommt?

Lösung zu Aufgabe 1:

Im Folgenden sei s_0 der Bremsweg des ersten Fahrzeugs mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0, s_1 der Bremsweg des zweiten Fahrzeugs mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = v_0 + \Delta v_0$

Es gilt:

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} = -b_0(1 - \frac{v}{v^*})$$

Hieraus ergibt sich:

$$vdv = -b_0(1 - \frac{v}{v^*})dx$$

$$-\int_{v_0}^{0} \frac{v}{b_0(1 - \frac{v}{v^*})} dv = \int_0^{s_0} dx$$

$$s_0 = -\frac{1}{b_0} \int_{v_0}^{0} v^* \frac{v}{v^* - v} dv = \frac{v^*}{b_0} \int_{v_0}^{0} \frac{v}{v - v^*} dv = \frac{v^*}{b_0} \int_{v_0}^{0} (1 + \frac{v^*}{v - v^*}) dv$$

$$s_0 = \frac{v^*}{b_0} [v + v^* \ln|v - v^*|]_{v_0}^{0} = \frac{v^*}{b_0}(-v_0 + v^* \ln|\frac{-v^*}{v_0 - v^*}|) = \frac{v^*}{b_0}(-v_0 - v^* \ln|\frac{v_0 - v^*}{-v^*}|)$$

$$s_0 = -\frac{v^{*2}}{b_0}(\frac{v_0}{v^*} + \ln|1 - \frac{v_0}{v^*}|)$$

Analog ergibt sich hieraus der Bremsweg des zweiten Fahrzeugs:

$$s_1 = -\frac{v^{*2}}{b_0}(\frac{v_1}{v^*} + \ln|1 - \frac{v_1}{v^*}|) = -\frac{v^{*2}}{b_0}(\frac{v_0 + \Delta v_0}{v^*} + \ln|1 - \frac{v_0 + \Delta v_0}{v^*}|)$$

Damit die beiden Fahrzeuge nicht kollidieren, muß gelten: $\Delta s + s_0 \geq v_1 \Delta t + s_1$

$$\Delta s \geq v_1 \Delta t + s_1 - s_0$$

$$\Delta s \geq (v_0 + \Delta v_0)\Delta t - \frac{v^{*2}}{b_0}(\frac{v_0 + \Delta v_0}{v^*} - \frac{v_0}{v^*} + \ln|1 - \frac{v_0 + \Delta v_0}{v^*}| - \ln|1 - \frac{v_0}{v^*}|)$$

$$\Delta s \geq (v_0 + \Delta v_0)\Delta t - \frac{v^{*2}}{b_0}(\frac{\Delta v_0}{v^*} + \ln|\frac{\frac{v^* - v_0 - \Delta v_0}{v^*}}{\frac{v^* - v_0}{v^*}}|)$$

$$\Delta s \geq (v_0 + \Delta v_0)\Delta t - \frac{v^{*2}}{b_0}(\frac{\Delta v_0}{v^*} + \ln|1 - \frac{\Delta v_0}{v^* - v_0}|)$$

Aufgabe 2:

Ein Wagen fährt mit der Geschwindigkeit v_0 auf einer Kreisbahn mit dem Radius R. Er soll so abgebremst werden, daß der Betrag des resultierenden Beschleunigungsvektors ständig den konstanten Wert b_0 besitzt.
Geben Sie den Bremsweg in Abhängigkeit von R, v_0 und b_0 an.

Hinweis: $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^4}} dx = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{a} + C$

Lösung zu Aufgabe 2:

Im Folgenden sei $b_t = \frac{dv}{dt}$ die Tangentialbeschleunigung,
$b_n = \frac{v^2}{R}$ die Normalbeschleunigung des Wagens.

Hieraus folgt: $b_0^2 = b_t^2 + b_n^2$

$b_t = \pm\sqrt{b_0^2 - \frac{v^4}{R^2}} = -\sqrt{b_0^2 - \frac{v^4}{R^2}}$, da es sich um eine Bremsung handelt.

Mit $b_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} = -\sqrt{b_0^2 - \frac{v^4}{R^2}} = -\frac{1}{R}\sqrt{b_0^2 R^2 - v^4}$, folgt:

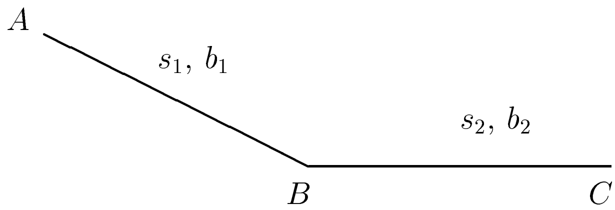
$v dv = b_t dx$

$$-R \int_{v_0}^{0} \frac{v}{\sqrt{b_0^2 R^2 - v^4}} dv = \int_0^s dx$$

$$s = -R\left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{v^2}{Rb_0}\right]_{v_0}^{0}$$

$$s = \frac{1}{2} R \arcsin \frac{v_0^2}{Rb_0}$$

Aufgabe 3:



Ein Schlitten rutscht aus der Ruhe heraus gleichförmig beschleunigt einen Abhang der Länge $AB = s_1$ herunter. Anschließend gleitet er verzögert auf horizontaler Strecke $BC = s_2$ weiter und kommt im Punkt C zum Stillstand. Für die gesamte Strecke $AC = s_1 + s_2$ benötigt der Schlitten die Zeit T.
Wie groß ist die Beschleunigung b_1 und die Verzögerung b_2, wenn die Strecken s_1 und s_2 sowie die Zeit T bekannt sind?

Lösung zu Aufgabe 3:

Die Geschwindigkeit im Punkt B sei v_B und die im Punkt C ist $v_C = 0$.
Die Zeit für den beschleunigten Teilabschnitt sei t_1, die für den verzögerten Teilabschnitt t_2.
Die Bewegungsgleichungen der beiden Teilabschnitte lauten:

$$v_{AB}(t) = b_1 t$$
$$s_{AB}(t) = \frac{1}{2} b_1 t^2$$
$$v_{BC}(t) = v_B - b_2 t$$
$$s_{BC}(t) = v_B t - \frac{1}{2} b_2 t^2$$

Mit den Anfangsbedingungen folgt hieraus:

(1) $v_B = v_{AB}(t_1) = b_1 t_1$
(2) $s_1 = s_{AB}(t_1) = \frac{1}{2} b_1 t_1^2$
(3) $v_C = v_{BC}(t_2) = v_B - b_2 t_2 = 0$
(4) $s_2 = s_{BC}(t_2) = v_B t_2 - \frac{1}{2} b_2 t_2^2$
(5) $t_1 + t_2 = T$

Dies ergibt ein LGS:

(1) in (3) $\quad b_1 t_1 = b_2 t_2 \Rightarrow b_1 = b_2 \dfrac{t_2}{t_1} \quad (6)$

(3) in (4) $\quad s_2 = b_2 t_2^2 - \dfrac{1}{2} b_2 t_2^2 = \dfrac{1}{2} b_2 t_2^2 \quad (7)$

(2) : (7) mit (6) $\quad \dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{\frac{1}{2} b_1 t_1^2}{\frac{1}{2} b_2 t_2^2} = \dfrac{t_1}{t_2} \quad (8)$

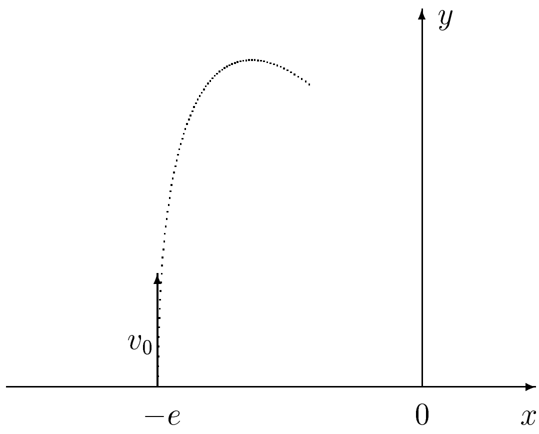
(8) in (5) $\quad T = t_1 + \dfrac{s_2}{s_1} = t_1 \dfrac{s_1 + s_2}{s_1}$

$$\Rightarrow t_1 = T \frac{s_1}{s_1 + s_2} \quad (9a)$$
$$\Rightarrow t_2 = T \frac{s_2}{s_1 + s_2} \quad (9b)$$

(9a) in (2) $\Rightarrow b_1 = \dfrac{2s_1}{t_1^2} = 2\dfrac{(s_1+s_2)^2}{s_1 T^2}$

(9b) in (7) $\Rightarrow b_2 = \dfrac{2s_2}{t_2^2} = 2\dfrac{(s_1+s_2)^2}{s_2 T^2}$

Aufgabe 4:



Die Bewegung eines Punktes in der x-y-Ebene wird durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\alpha}{x^2},\ \alpha > 0$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -\beta,\ \beta > 0$$

beschrieben. Dabei sind v_x und v_y die Geschwindigkeitskomponenten in x- bzw. y-Richtung, α und β sind Konstanten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Punkt auf der x-Achse bei $P_0(-e/0)$ und besitzt die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in positiver y-Richtung.

a) Nach welcher Zeit t_1 erreicht der Punkt die y-Achse?

b) Wie groß muß die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sein, damit der Punkt die y-Achse genau im Ursprung erreicht?

Hinweis: $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}) + C$

Lösung zu Aufgabe 4:

Es gilt:
$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v_x \cdot \frac{dv_x}{dx} = \frac{\alpha}{x^2}$, hieraus ergibt sich:

$$v_x dv_x = \frac{\alpha}{x^2}dx$$

$$\int_0^{v_x} \bar{v}_x d\bar{v}_x = \alpha \int_{-e}^{x} \frac{1}{\bar{x}^2}d\bar{x}$$

$$\frac{1}{2}[\bar{v}_x^2]_0^{v_x} = -\alpha[\frac{1}{\bar{x}}]_{-e}^{x} \Rightarrow v_x = \sqrt{-2\alpha(\frac{1}{x} + \frac{1}{e})}$$

Mit $v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v_x}$, folgt:

$$\int_0^{t_1} dt = \int_{-e}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-2\alpha(\frac{1}{x} + \frac{1}{e})}}$$

$$t_1 = \int_{-e}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-2\alpha\frac{e+x}{ex}}} = \int_{-e}^{0} \sqrt{\frac{e}{2\alpha}\frac{-x}{x+e}}dx = \sqrt{\frac{e}{2\alpha}}\int_{-e}^{0} \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x+e}}dx$$

Mit der Substitution $u = \sqrt{x+e} \Rightarrow -x = e - u^2$ folgt $dx = 2udu$ und damit ergibt sich unter Verwendung des Hinweises:

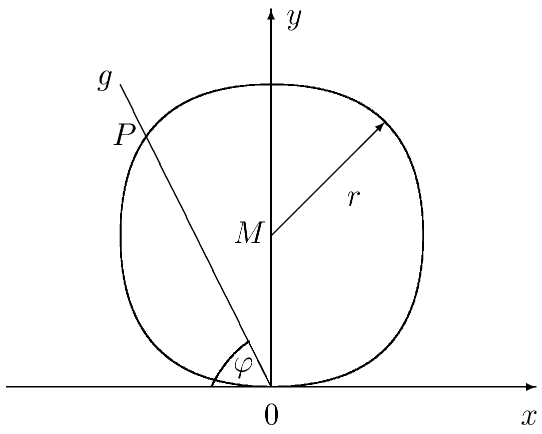
$$t_1 = \sqrt{\frac{e}{2\alpha}}\int 2\sqrt{e-u^2}du \text{ und die Rücksubstitution ergibt:}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{e}{2\alpha}}[\sqrt{x+e} \cdot \sqrt{e-(x+e)} + e\arcsin\frac{\sqrt{x+e}}{\sqrt{e}}]_{-e}^{0} = \sqrt{\frac{e}{2\alpha}}(0 + \frac{\pi}{2}e - 0 - 0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e^3}{2\alpha}}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\beta \Rightarrow \int\limits_{v_0}^{v_y} d\bar{v}_y = -\beta \int\limits_0^t d\bar{t} \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = -\beta t + v_0 \Rightarrow \int\limits_0^0 dy = \int\limits_0^{t_1} (-\beta t + v_0) dt$$

$$0 = -\frac{1}{2}\beta t_1^2 + v_0 t_1 \Rightarrow v_0 = \frac{\beta t_1}{2} = \frac{\pi}{4}\beta\sqrt{\frac{e^3}{2\alpha}}$$

Aufgabe 5:



Eine Gerade g dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Punkt $O(0/0)$ und schneidet einen durch O gehenden ortsfesten Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0/r)$ und dem Radius r in P.
φ sei der Winkel zwischen der Geraden g und der negativen x-Achse.
Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes P als Funktion von φ und ω.

Hinweis: $1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi$

Lösung zu Aufgabe 5:

Es gilt:

$\alpha\angle(OMP)$, $OM = r$, $MP = r$, $OP = l(\varphi)$

$\alpha = 180° - 2(90° - \varphi) = 2\varphi$

$\omega = \dot{\varphi} = const.$

$\dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 0$

$r = const.$

Der Cosinussatz liefert:

$(OP)^2 = l(\varphi)^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos 2\varphi = 2r^2(1 - \cos 2\varphi) = 4r^2\sin^2\varphi$

$l(\varphi) = 2r\sin\varphi$

$\dot{l}(\varphi) = 2r\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\ddot{l}(\varphi) = 2r(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = -2r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$

Für die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten gilt:

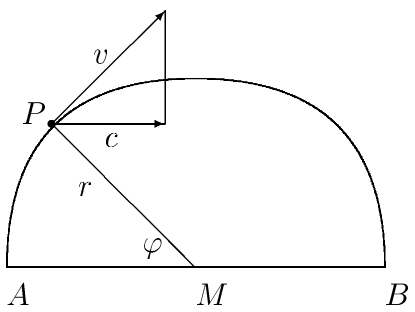
$$v(\varphi) = \sqrt{\dot{l}(\varphi)^2 + (\dot{\varphi}l(\varphi))^2} = \sqrt{4r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 4r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi} = 2r\dot{\varphi} = 2r\omega$$

Für die Beschleunigung in Polarkoordinaten gilt:

$$b(\varphi) = \sqrt{(\ddot{l}(\varphi) - \dot{\varphi}^2 l(\varphi))^2 + (\ddot{\varphi}l(\varphi) + 2\dot{\varphi}\dot{l}(\varphi))^2}$$

$$b(\varphi) = \sqrt{(-2r\dot{\varphi}^2\sin\varphi - 2r\dot{\varphi}^2\sin\varphi)^2 + (4r\dot{\varphi}^2\cos\varphi)^2} = \sqrt{16r^2\dot{\varphi}^4(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = 4r\dot{\varphi}^2 = 4r\omega^2$$

Aufgabe 6:



Ein Punkt P bewegt sich auf einem Halbkreis mit dem Radius r, wobei die zum Durchmesser AB parallele Komponente der Geschwindigkeit v den konstanten Wert c beibehält.
Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes P als Funktion des Winkels φ.

Lösung zu Aufgabe 6:

Für die Bogenlänge s gilt: $s = r\varphi \Rightarrow \varphi = \dfrac{s}{r}$

Hieraus folgt für die Geschwindigkeit:

$$v(\varphi) = \frac{c}{\sin\varphi}$$
$$v(s) = \frac{c}{\sin(\frac{s}{r})}$$

Für die Tangentialbeschleunigung gilt:

$$b_t(s) = \frac{dv(s)}{dt} = \frac{dv(s)}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v(s)\frac{dv(s)}{ds}$$
$$b_t(s) = \frac{c}{\sin(\frac{s}{r})}(-\frac{c}{\sin^2(\frac{s}{r})}\cdot\cos(\frac{s}{r})\cdot\frac{1}{r}) = -\frac{c^2}{r}\cdot\frac{\cos(\frac{s}{r})}{\sin^3(\frac{s}{r})}$$

Für die Normalbeschleunigung gilt:

$$b_n(s) = \frac{v(s)^2}{r} = \frac{c^2}{r}\cdot\frac{1}{\sin^2(\frac{s}{r})}$$

Für die Gesamtbeschleunigung gilt:

$$b(s) = \sqrt{b_t(s)^2 + b_n(s)^2} = \frac{c^2}{r}\sqrt{\frac{\cos^2(\frac{s}{r})}{\sin^6(\frac{s}{r})} + \frac{1}{\sin^4(\frac{s}{r})}} = \frac{c^2}{r}\sqrt{\frac{\cos^2(\frac{s}{r}) + \sin^2(\frac{s}{r})}{\sin^6(\frac{s}{r})}} = \frac{c^2}{r}\cdot\frac{1}{\sin^3(\frac{s}{r})}$$
$$b(\varphi) = \frac{c^2}{r}\cdot\frac{1}{\sin^3\varphi}$$

Aufgabe 7:

Ein Fahrzeug A fährt auf der Autobahn mit der Geschwindigkeit v_A. Ein Fahrzeug B fährt mit der Geschwindigkeit $v_B < v_A$ und der konstanten Beschleunigung a_B im Abstand d_0 vor dem Fahrzeug A auf die Autobahn ein. Welche konstante Bremsverzögerung $-a_A$ ist für das Fahrzeug A erforderlich, damit der Abstand der beiden Fahrzeuge nicht kleiner als d^* wird?

a) Stellen Sie die Weg-Zeit-Gesetze für die beiden Fahrzeuge auf und bestimmen Sie damit den Abstand d der beiden Fahrzeuge als Funktion von der Zeit t in allgemeiner Form
$d(t) = d(t;\, d_0,\, v_A,\, v_B,\, a_A,\, a_B)$.
Vernachlässigen Sie hierbei die Reaktionszeit des Fahrers des Fahrzeugs A und verwenden Sie die im einleitenden Text angegebenen Werte als Anfangswerte zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

b) Zu welcher Zeit t^* wird dieser Abstand minimal? Wie groß ist dieser minimale Abstand d_{min}? Ermitteln Sie die gesuchte Bremsverzögerung $-a_A$ aus der Bedingung $d_{min} = d^*$ in der Form von $-a_A = -a_A(d^*,\, d_0,\, v_A,\, v_B,\, a_B)$

Lösung zu Aufgabe 7:

Die Bewegungsgleichungen für die beiden Fahrzeuge A und B lauten:

$$A: \qquad s_A = v_A t - \frac{1}{2} a_A t^2$$
$$B: \qquad s_B = v_B t + \frac{1}{2} a_B t^2 + d_0$$

Der Abstand der beiden Fahrzeuge ergibt sich zu:

$$d(t) = s_B - s_A$$
$$d(t) = -(v_A - v_B)t + \frac{1}{2}(a_A + a_B)t^2 + d_0$$

Die Zeit t^* minimalen Abstands ist die Abszisse des Tiefpunktes der Funktion $d(t)$.

$$\dot{d}(t) = -(v_A - v_B) + (a_A + a_B)t$$

$$\dot{d}(t^*) = 0$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{v_A - v_B}{a_A + a_B}$$

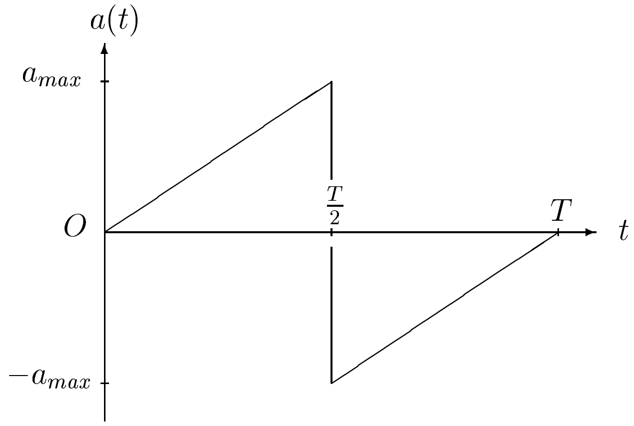
Der minimale Abstand d_{min} ist die Ordinate des Tiefpunktes der Funktion $d(t)$.

$$d_{min} = d(t^*) = d^* = -\frac{(v_A - v_B)^2}{a_A + a_B} + \frac{1}{2}\frac{(v_A - v_B)^2}{a_A + a_B} + d_0 = d_0 - \frac{1}{2}\frac{(v_A - v_B)^2}{a_A + a_B}$$

Die gesuchte Bremsverzögerung $-a_A$ ergibt sich aus der obigen Gleichung:

$$d^* = d_0 - \frac{1}{2}\frac{(v_A - v_B)^2}{a_A + a_B}$$
$$\frac{1}{d_0 - d^*} = \frac{2(a_A + a_B)}{(v_A - v_B)^2} \Rightarrow a_A + a_B = \frac{(v_A - v_B)^2}{2(d_0 - d^*)}$$
$$\Rightarrow -a_A = a_B - \frac{(v_A - v_B)^2}{2(d_0 - d^*)}$$

Aufgabe 8:



Eine Punktmasse wird aus der Ruhe heraus beschleunigt und anschließend verzögert. Das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm ist in der nebenstehenden Skizze dargestellt.

a) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit v_{max}?

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = T$?

c) Welchen Weg hat die Punktmasse bis zum Zeitpunkt $t = T$ zurückgelegt?

Lösung zu Aufgabe 8:

Die Punktmasse startet aus der Ruhe heraus, das bedeutet $v(0) = 0$.

Die Beschleunigung ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(\frac{T}{2}/0)$, dies hat zur Folge, daß die Geschwindigkeit $v(t)$ achsensymmetrisch zur Achse $t = \frac{T}{2}$ verläuft und der Weg wiederum punktsymmetrisch zum Punkt $Q(\frac{T}{2}/s(\frac{T}{2}))$ ist.

So interessiert nur der Bereich $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$, für den folgende Bewegungsgleichungen gelten:

$$a(t) = \frac{2a_{max}}{T}t$$
$$v(t) = \frac{a_{max}}{T}t^2$$
$$s(t) = \frac{a_{max}}{3T}t^3$$

Die maximale Geschwindigkeit hat der Körper am Ende der Beschleunigungsphase:

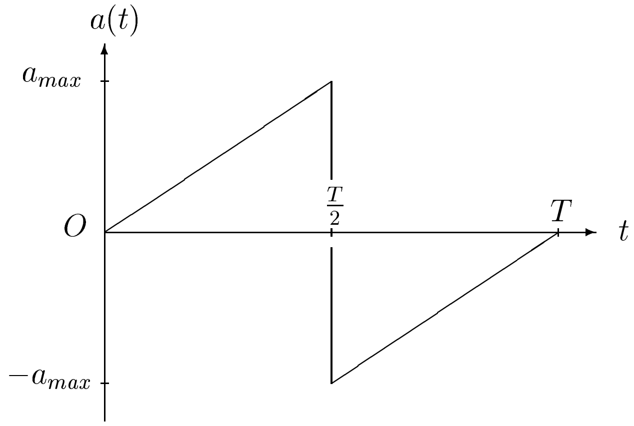
$$v_{max} = v(\frac{T}{2}) = \frac{a_{max}}{4}T$$

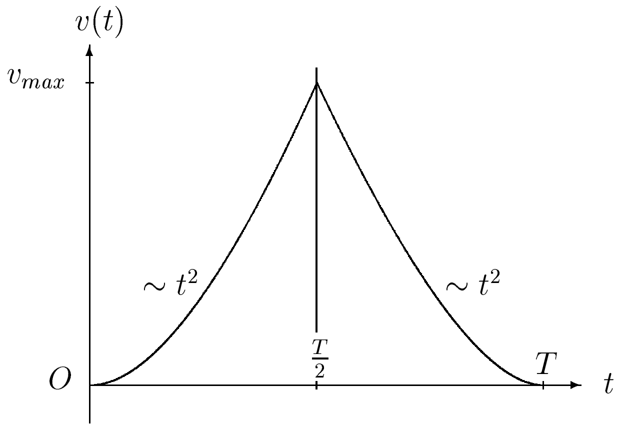
Da die Geschwindigkeit achsensymmetrisch zur Achse $t = \dfrac{T}{2}$ ist, gilt $v(0) = v(T) = 0$.

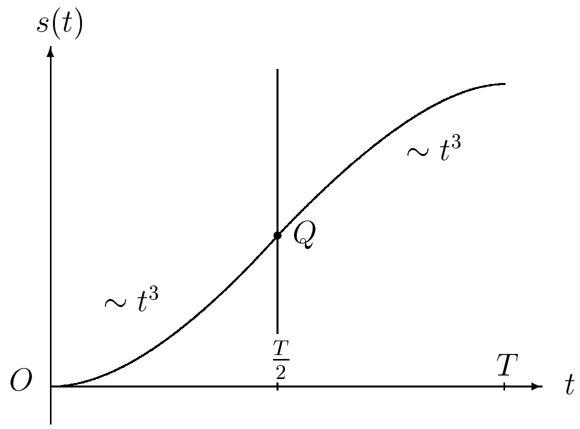
Da auch der Weg punktsymmetrisch zum Punkt $Q(\frac{T}{2}/s(\frac{T}{2}))$ ist, gilt $s(T) = 2s(\frac{T}{2})$

$$s(T) = 2\frac{a_{max}}{3T}(\frac{T}{2})^3 = \frac{a_{max}}{12}T^2$$

Die Diagramme für die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den Weg sehen wie folgt aus:







Aufgabe 9:

Ein S-Bahn-Zug kann maximal beschleunigen mit $a_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und maximal bremsen mit $a_2 = -\frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Seine Höchstgeschwindigkeit ist $v_{max} = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Welche Zeit benötigt er mindestens zwischen zwei Stationen mit der Entfernung

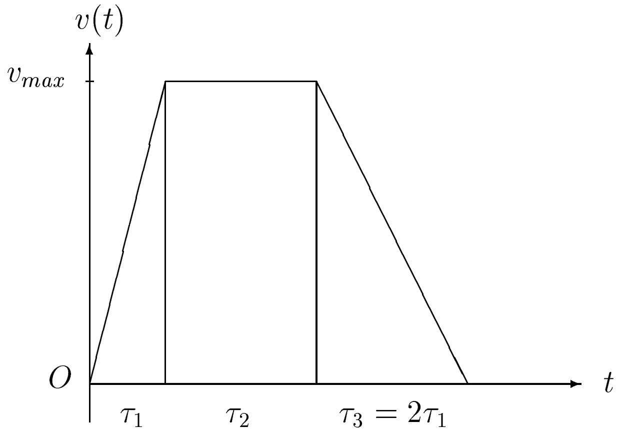
a) $x_1 = 1\,\mathrm{km}$?

b) $x_2 = 10\,\mathrm{km}$?

Wird im Fall a) die Höchstgeschwindigkeit überhaupt erreicht?
Skizzieren Sie für beide Aufgabenteile das v-t-Diagramm und berechnen Sie jeweils die mittlere Geschwindigkeit.

Lösung zu Aufgabe 9:

Das v-t-Diagramm sieht folgendermaßen aus:



Für die Beschleunigungsphase gilt:
$v(t) = a_1 t$
$s(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2$
Es wird gefordert:
$v(\tau_1) = v_{max} \Rightarrow \tau_1 = \frac{v_{max}}{a_1} = 60\,\mathrm{s}$

$s_1 = s(\tau_1) = \frac{v_{max}^2}{2a_1} = 900\,\mathrm{m}$

Für die Bremsphase gilt:
Wegen $|a_2| = \frac{1}{2} a_1$ gilt:
Doppelte Zeit $\Rightarrow \tau_3 = 2\tau_1 = 120\,\mathrm{s}$
$s_3 = \frac{1}{2}|a_2|(2\tau_1)^2 = 2s_1 = 1800\,\mathrm{m}$

Wegen $s_1 + s_3 = 2,7\,\mathrm{km} > x_1 = 1\,\mathrm{km}$ wird im Fall a) die Höchstgeschwindigkeit nie erreicht.
So gilt dieses Diagramm nur für den Aufgabenteil b).

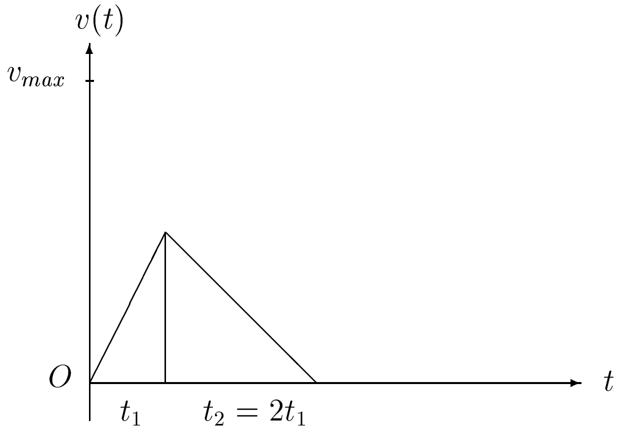
Es gilt:
$s_2 = x_2 - (s_1 + s_2) = 10000\,\mathrm{m} - 2700\,\mathrm{m} = 7300\,\mathrm{m}$

$\tau_2 = \dfrac{s_2}{v_{max}} = 243,3\,\mathrm{s}$

$\Rightarrow T_2 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 423,3\,\mathrm{s}$

Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich zu:
$\bar{v}_2 = \dfrac{x_2}{T_2} = 23,62\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Das richtige v-t-Diagramm für den Aufgabenteil a) sieht folgendermaßen aus:



v_{max} wird nie erreicht.

Für die Beschleunigungsphase gilt:
$s(t) = \dfrac{1}{2}a_1t^2$
$s_1 = s(t_1) = \dfrac{1}{2}a_1t_1^2$

Für die Bremsphase gilt:
Wegen $|a_2| = \dfrac{1}{2}a_1$ gilt:
Doppelte Zeit $\Rightarrow t_2 = 2t_1$
$s_2 = \dfrac{1}{2}|a_2|t_2^2 = 2|a_2|t_1^2$

Hieraus ergibt sich:
$x_1 = \dfrac{1}{2}(a_1t_1^2 + |a_2|t_2^2) = \dfrac{1}{2}(a_1t_1^2 + 4|a_2|t_1^2) = \dfrac{1}{2}(a_1t_1^2 + 2a_1t_1^2) = \dfrac{3}{2}a_1t_1^2$

$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{2x_1}{3a_1}} = 36,5\,\mathrm{s}$

Die Gesamtzeit berechnet sich wie folgt:
$T_1 = t_1 + t_2 = 3t_1 = 109,5\,\mathrm{s}$

Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich zu:
$\bar{v}_1 = \dfrac{x_1}{T_1} = 9,13\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 10:

Ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 um seine horizontale Achse rotierendes Rad wird zur Zeit $t_0 = 0$ stoßfrei auf eine horizontale Unterlage gesetzt und dort so freigegeben, daß die Geschwindigkeit des Radmittelpunktes im Augenblick der Freigabe $v_0 = 0$ ist.
Das Rad habe die Masse m, den Radius r und den Trägheitsradius k. Die Gleitreibungszahl zwischen Rad und Unterlage sei μ. Der Rollwiderstand werde vernachlässigt.

a) Bis zu welcher Zeit t_1 gleitet das Rad auf der Unterlage?

b) Welchen Weg legt der Radmittelpunkt in der Zeit t_1 zurück?
Welchen Weg in der Zeit $2t_1$?

c) Wie groß ist der Verlust an kinetischer Energie
c_1) ΔE_1 während der Zeit $0 \leq t \leq t_1$,
c_2) ΔE_2 während der Zeit $t_1 \leq t \leq 2t_1$?

d) Wieviel Prozent seiner Anfangsenergie verliert das Rad während des gesamten Vorgangs, wenn es die Form
d_1) einer homogenen Scheibe $J_{Sch} = \frac{1}{2}mr^2$,
d_2) eines Ringes $J_R = mr^2$ hat?

Lösung zu Aufgabe 10:

Die Reibungskraft $F_R = \mu mg$ beschleunigt den Radmittelpunkt und verzögert die Rotation des Rades um seine horizontale Achse.
Die Anfangsbedingungen lauten:
$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0 = 0,\ \varphi(0) = 0,\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0$

Der Impulssatz für den Radmittelpunkt lautet:
$m\ddot{x} = \mu mg \Rightarrow \ddot{x} = \mu g$
$\dot{x}(t) = \mu g t$
$x(t) = \frac{1}{2}\mu g t^2$

Der Drehimpulssatz für den Radmittelpunkt lautet:
Das Trägheitsmoment ist $J = mk^2$
$J\ddot{\varphi} = -\mu mgr \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{\mu gr}{k^2}$
$\dot{\varphi}(t) = \omega_0 - \frac{\mu gr}{k^2}t$

Der Übergang zum Rollen erfolgt mit: $\dot{x}(t_1) = r\dot{\varphi}(t_1)$

$$\mu g t_1 = r\omega_0 - r\frac{\mu gr}{k^2}t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{rk^2\omega_0}{\mu g(k^2+r^2)}$$

Der Weg des Radmittelpunktes für die Zeit $0 \leq t \leq t_1$ ist gleichmäßig beschleunigt und für $t_1 \leq t \leq 2t_1$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\dot{x}(t_1)$.

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2}\mu g t_1^2 = \frac{1}{2}\mu g\frac{r^2k^4\omega_0^2}{\mu^2g^2(k^2+r^2)^2} = \frac{r^2k^4\omega_0^2}{2\mu g(k^2+r^2)^2}$$
$$\dot{x}(t_1) = \mu g\frac{rk^2\omega_0}{\mu g(k^2+r^2)} = \frac{rk^2\omega_0}{(k^2+r^2)}$$

$$x_2 = x_1 + \dot{x}(t_1)(2t_1 - t_1) = x_1 + \dot{x}(t_1)t_1 = x_1 + \frac{rk^2\omega_0}{(k^2+r^2)}\frac{rk^2\omega_0}{\mu g(k^2+r^2)} = 3x_1$$

Da der Rollwiderstand vernachlässigt werden kann ist $\Delta E_2 = 0$, da die Relativgeschwindigkeit v_R zwischen Rad und Unterlage für die Zeit $t_1 \leq t \leq 2t_1$ null ist $v_R = 0$ und somit keine Reibungsverluste durch Schlupfen entstehen.

Für die Zeit $0 \leq t \leq t_1$ schlupft das Rad auf der Unterlage und die Relativgeschwindigkeit zwischen Rad und Unterlage ist:

$$v_R(t) = r\dot{\varphi}(t) - \dot{x}(t) = r\omega_0 - \mu g\frac{k^2+r^2}{k^2}t$$

Der Energieverlust an kinetischer Energie ist gleich der Reibungsarbeit bis zum Zeitpunkt t_1.

$$\Delta E_1 = \int_0^{t_1} F_R \cdot v_R(t)dt = \mu mg\int_0^{t_1}(r\omega_0 - \mu g\frac{k^2+r^2}{k^2}t)dt = \mu mg[r\omega_0 t - \frac{1}{2}\mu g\frac{k^2+r^2}{k^2}t^2]_0^{t_1}$$

$$\Delta E_1 = \mu mg(r\omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\mu g\frac{k^2+r^2}{k^2}t_1^2) = \mu mg(r\omega_0\frac{rk^2\omega_0}{\mu g(k^2+r^2)} - \frac{1}{2}\mu g\frac{k^2+r^2}{k^2}\frac{r^2k^4\omega_0^2}{\mu^2g^2(k^2+r^2)^2})$$

$$\Delta E_1 = \underbrace{\frac{1}{2}mk^2\omega_0^2}_{E_0}\frac{r^2}{k^2+r^2} = E_0\frac{r^2}{k^2+r^2}$$

Analog kann man den Verlust an kinetischer Energie über die Energiebilanz berechnen:

$$\Delta E_1 = \underbrace{E_{vorher}}_{E(0)=E_0} - \underbrace{E_{nachher}}_{E(t_1)}$$

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}mk^2\omega_0^2 - (\frac{1}{2}mk^2\dot{\varphi}(t_1)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}(t_1)) = \cdots = E_0\frac{r^2}{k^2+r^2}$$

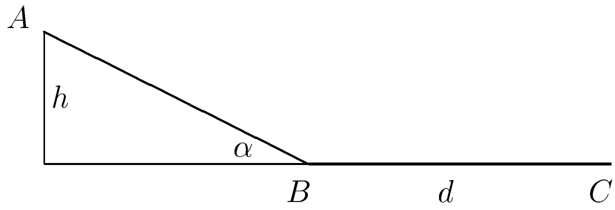
Der prozentuale Energieverlust für die beiden Trägheitsradien $k_{Sch}^2 = \frac{1}{2}r^2$, $k_R^2 = 1r^2$ ist:

$$\frac{\Delta E_1}{E_0} = \frac{r^2}{k^2+r^2}$$

für die Scheibe: $\frac{\Delta E_1}{E_0} = \frac{r^2}{k_{Sch}^2+r^2} = \frac{2}{3}$ oder 66,7%

für den Ring: $\frac{\Delta E_1}{E_0} = \frac{r^2}{k_R^2+r^2} = \frac{1}{2}$ oder 50%

Aufgabe 11:



Eine Kiste der Masse m gleitet eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α hinab, an die sich im Punkt B eine waagrechte Ebene anschließt. Der Gleitvorgang beginnt aus der Ruhe heraus in der Höhe h im Punkt A. Auf dem gesamten Weg tritt Gleitreibung mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ auf und der Übergang zwischen schiefer und waagrechter Ebene erfolgt stoßfrei.

a) Wie groß muß α mindestens sein, damit Gleiten auf der schiefen Ebene möglich ist?

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit v_B im Punkt B?

c) Wie muß α gewählt werden, damit die Kiste auf der waagrechten Ebene nach Durchlaufen der Strecke $d = BC$ zur Ruhe kommt?

Lösung zu Aufgabe 11:

Die Bedingung, damit Gleiten auf der schiefen Ebene überhaupt möglich ist:

Die Hangabtriebskraft F_H muß größer sein als die Reibungskraft F_R:
$F_H \geq F_R$

$mg \sin\alpha \geq \mu mg \cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha \geq \mu$

Die Strecke $AB = x_{AB}$ ergibt sich über Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck:
$x_{AB} = \dfrac{h}{\sin\alpha}$

Der Energieerhaltungssatz liefert:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + (\mu mg\cos\alpha)\, x_{AB}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + \mu mgh\cot\alpha$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2gh(1-\mu\cot\alpha)}$$

Der Energieerhaltungssatz liefert:

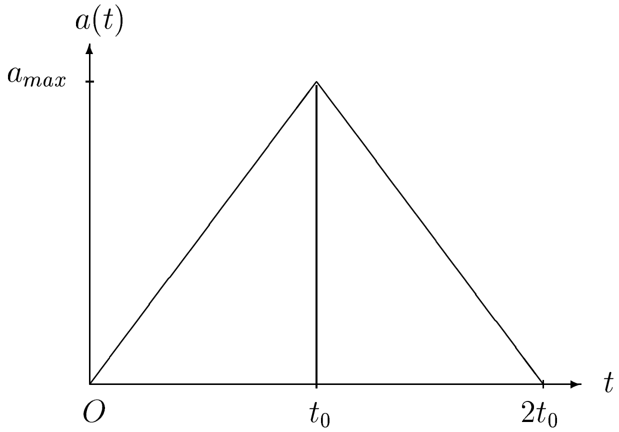
$$mgh = \mu mgd + (\mu mg\cos\alpha)\, x_{AB}$$

$$mgh = \mu mgd + \mu mgh\cot\alpha$$

$$h - \mu d = \mu h\cot\alpha$$

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\mu} - \frac{d}{h}$$

Aufgabe 12:



Eine Punktmasse wird aus der Ruhe heraus beschleunigt.
Das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm ist in der nebenstehenden Skizze dargestellt.

a) Zu welchem Zeitpunkt t^* mit $0 \leq t^* \leq 2t_0$ ist die Geschwindigkeit maximal und wie groß ist die maximale Geschwindigkeit v_{max}?

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = t_0$?
In welchem Verhältnis stehen die Geschwindigkeiten $v_1 = v(t_0)$ und $v_2 = v(2t_0)$?

c) In welchem Verhältnis stehen die Teilstrecken s_1 und s_2, die die Punktmasse in den Zeitabschnitten $0 \leq t \leq t_0$ und $t_0 \leq t \leq 2t_0$ zurücklegt?

Lösung zu Aufgabe 12:

Die Beschleunigung a hängt folgendermaßen von der Zeit t ab:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{a_{max}}{t_0} t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ -\frac{a_{max}}{t_0} t + 2a_{max} & \text{für} \quad t_0 \leq t \leq 2t_0 \end{cases}$$

Die Geschwindigkeit v ist eine Stammfunktion der Beschleunigung a in Abhängigkeit von der Zeit t:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{a_{max}}{2t_0} t^2 + C_1 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ -\frac{a_{max}}{2t_0} t^2 + 2a_{max} t + C_2 & \text{für} \quad t_0 \leq t \leq 2t_0 \end{cases}$$

Mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

Die Stetigkeit der Geschwindigkeit zur Zeit t_0 fordert:

$$\frac{a_{max}}{2t_0} t_0^2 = -\frac{a_{max}}{2t_0} t_0^2 + 2a_{max} t_0 + C_2 \Rightarrow C_2 = -a_{max} t_0$$

So hängt die Geschwindigkeit v folgendermaßen von der Zeit t ab:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{a_{max}}{2t_0} t^2 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ -\frac{a_{max}}{2t_0} t^2 + 2a_{max} t - a_{max} t_0 & \text{für} \quad t_0 \leq t \leq 2t_0 \end{cases}$$

Der Weg s ist eine Stammfunktion der Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{a_{max}}{6t_0}t^3 + C_3 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ -\frac{a_{max}}{6t_0}t^3 + a_{max}t^2 - a_{max}t_0 t + C_4 & \text{für} \quad t_0 \leq t \leq 2t_0 \end{cases}$$

Mit der Anfangsbedingung o.B.d.A. $s(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$.

Die Stetigkeit des Wegs zur Zeit t_0 fordert:

$$\frac{a_{max}}{6t_0}t_0^3 = -\frac{a_{max}}{6t_0}t_0^3 + a_{max}t_0^2 - a_{max}t_0^2 + C_4 \Rightarrow C_4 = \frac{a_{max}t_0^2}{3}$$

So hängt der Weg s folgendermaßen von der Zeit t ab:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{a_{max}}{6t_0}t^3 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ -\frac{a_{max}}{6t_0}t^3 + a_{max}t^2 - a_{max}t_0 t + \frac{a_{max}t_0^2}{3} & \text{für} \quad t_0 \leq t \leq 2t_0 \end{cases}$$

Da es sich um eine dauernde Beschleunigung handelt, ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t^* = 2t_0$ maximal.

$$v_{max} = v(2t_0) = -\frac{a_{max}}{2t_0}(2t_0)^2 + 2a_{max}(2t_0) - a_{max}t_0 = a_{max}t_0 = v_2$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 beträgt:

$$v(t_0) = \frac{a_{max}}{2t_0}t_0^2 = \frac{1}{2}a_{max}t_0 = v_1$$

Das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten ist:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$$

Für die Teilstrecken gilt: $s_1 = s(t_0)$ und $s_2 = s(2t_0) - s(t_0)$

$$s(t_0) = \frac{a_{max}}{6t_0}t_0^3 = \frac{1}{6}a_{max}t_0^2$$

$$s(2t_0) = -\frac{a_{max}}{6t_0}(2t_0)^3 + a_{max}(2t_0)^2 - a_{max}t_0 2t_0 + \frac{a_{max}t_0^2}{3} = a_{max}t_0^2$$

Hieraus ergeben sich die Teilstrecken:

$$s_1 = s(t_0) = \frac{1}{6}a_{max}t_0^2$$

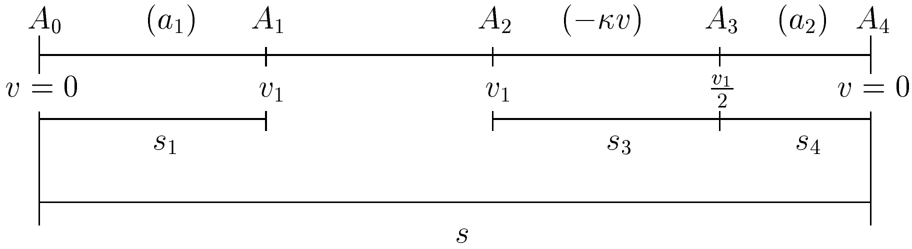
$$s_2 = s(2t_0) - s(t_0) = a_{max}t_0^2 - \frac{1}{6}a_{max}t_0^2 = \frac{5}{6}a_{max}t_0^2$$

Das Verhältnis der Teilstrecken ist also:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 13:

Ein elektrisch betriebener Zug durchfährt die Strecke $s = \overline{A_0 A_4} = 4\,\text{km}$. Er fährt mit konstanter Beschleunigung $a_1 = 0,4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ an, bis er in A_1 die Geschwindigkeit $v_1 = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht hat. Von A_1 bis A_2 behält er diese Geschwindigkeit bei. Dann wird der Strom abgestellt; dabei sinkt die Geschwindigkeit infolge der Fahrwiderstände mit einer zur jeweiligen Geschwindigkeit proportionalen Verzögerung $-\kappa v$ mit $\kappa = 0,005\,\frac{1}{\text{s}}$ ab, bis sie in A_3 den Wert $\frac{v_1}{2}$ erreicht hat. Nunmehr wird vollends mit der konstanten Verzögerung $a_2 = -0,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gebremst, bis der Zug in A_4 zur Ruhe kommt.
Wie groß sind die Teilstrecken $s_1 = \overline{A_0 A_1}$, $s_3 = \overline{A_2 A_3}$, $s_4 = \overline{A_3 A_4}$?
Wie lange dauert die Fahrt?



Lösung zu Aufgabe 13:

Abschnitt 1:
Gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe heraus bis zur Endgeschwindigkeit v_1
$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2,\ v_1 = a_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_1}{a_1} = 50\,\text{s} \Rightarrow s_1 = \frac{v_1^2}{2a_1} = 500\,\text{m}$

Abschnitt 2:
Gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit v_1
$s_2 = v_1 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{s_2}{v_1}$

Abschnitt 3:
Geschwindigkeitsproportionale Verzögerung von v_1 auf $\frac{v_1}{2}$

$$a(v) = -\kappa v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\kappa dt$$

$$\int_0^v \frac{1}{\bar{v}} d\bar{v} = \int_0^t -\kappa d\bar{t} \Rightarrow v(t) = Ce^{-\kappa t} \text{ mit der Anfangsbedingung } v(0) = v_1 \Rightarrow v(t) = v_1 e^{-\kappa t}$$

$$\int_{v_1}^{\frac{v_1}{2}} \frac{1}{v} dv = \int_0^{t_3} -\kappa dt \Rightarrow \ln|\frac{\frac{v_1}{2}}{v_1}| = -\kappa t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{\ln 2}{\kappa} = 138,6\,\text{s}$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v(t)dt$$

$$\int_0^{s_3} ds = \int_0^{t_3} v_1 e^{-\kappa t} dt \Rightarrow s_3 = [-\frac{v_1}{\kappa} e^{-\kappa t}]_0^{t_3} = [-\frac{v_1}{\kappa} e^{-\kappa t}]_0^{\frac{\ln 2}{\kappa}} = \frac{v_1}{2\kappa} = 2000\,\text{m}$$

Abschnitt 4:
Gleichmäßig verzögerte Bewegung von $\frac{v_1}{2}$ auf Null

$$s_4 = \frac{1}{2}a_2 t_4^2 + \frac{v_1}{2} t_4,\ v(t_4) = 0 = a_2 t_4 + \frac{v_1}{2} \Rightarrow t_4 = -\frac{v_1}{2a_2} = 20\,\text{s} \Rightarrow s_4 = 100\,\text{m}$$

$\Rightarrow s_2 = s - s_1 - s_3 - s_4 = 1400\,\mathrm{m}$

Aus Abschnitt 2 folgt: $t_2 = 70\,\mathrm{s} \Rightarrow t_{ges} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 278,6\,\mathrm{s}$

Aufgabe 14:

Aus dem Reifen mit dem Radius r eines mit der Geschwindigkeit v auf horizontaler Straße fahrenden Autos löst sich ein Spike.

a) Wie groß sind Wurfhöhe y_W und Wurfweite x_W?

b) Welchen Sicherheitsabstand d muß ein mit gleicher Geschwindigkeit $v = 126\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ nachfolgendes Auto halten, damit es nicht getroffen werden kann? (Luftwiderstand und Höhe des Ablösepunktes über der Straße sind hier vernachlässigbar)

Hinweis: Folgende trigonometrischen Umformungen gelten

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)},\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$$

Lösung zu Aufgabe 14:

Es gilt für einen Punkt auf dem abrollenden Reifen $v = r\dot{\varphi}$:

$x(t) = vt - r\sin\varphi$

$\dot{x}(t) = v - r\dot{\varphi}\cos\varphi = v(1-\cos\varphi)$

$y(t) = r - r\cos\varphi = r(1-\cos\varphi)$

$\dot{y}(t) = r\dot{\varphi}\sin\varphi = v\sin\varphi$

Die Abschußgeschwindigkeit ist: $v_0 = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = v\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\varphi} \Rightarrow v_0^2 = 2v^2(1-\cos\varphi)$

Der Abschußwinkel α ist derjenige Winkel, den der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}$ mit der Horizontalen $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ einschließt.

Es gilt: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_1}{|\vec{v}|\cdot|\vec{e}_1|} = \dfrac{v^2(1-\cos\varphi)}{v^2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\varphi}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\cos\varphi)} = \sin\dfrac{\varphi}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)}$ und $\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)}$

Es löse sich der Spike bei einem Winkel von φ_0, so ergibt sich der Abschußort, bezogen auf die Achse des Reifens zu $P(x_0/y_0)$ mit $x_0 = -r\sin\varphi_0$, $y_0 = r(1-\cos\varphi_0)$

Mit der Transformation $\bar{x} = x + x_0$ legen wir den Startpunkt auf die y-Achse.

Die Wurfparabel eines schiefen Wurfes aus der Höhe y_0 mit dem Abwurfwinkel $\alpha(\varphi_0)$ und der Abwurfgeschwindigkeit $v_0(\varphi_0)$ lautet:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\bar{x}^2 + \tan\alpha\bar{x} + y_0$$

Die Wurfweite ist die positive Nullstelle dieser Parabel. Die Wurfhöhe ist die Ordinate des Hochpunktes (Scheitel).

Berechnung der Wurfweite: $y = 0$

$$\bar{x}_{1,2} = -\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}\left(-\tan\alpha \pm \sqrt{\tan^2\alpha + \frac{2gy_0}{v_0^2\cos^2\alpha}}\right) = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}\left(\tan\alpha \mp \sqrt{\tan^2\alpha + \frac{2gy_0}{v_0^2\cos^2\alpha}}\right)$$

Streichen wir die negative Lösung:

$$\bar{x}_W = \bar{x}_2 = \frac{v_0^2}{g}\left(\tan\alpha\cos^2\alpha + \sqrt{\tan^2\alpha\cos^4\alpha + \frac{2gy_0\cos^4\alpha}{v_0^2\cos^2\alpha}}\right) = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha + \frac{2gy_0\cos^2\alpha}{v_0^2}}\right)$$

Einsetzen der Abwurfbedingungen:

$$\bar{x}_W = \frac{2v^2}{g}(1-\cos\varphi_0)(\frac{1}{2}\sin\varphi_0 + \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi_0 + \frac{2gy_0\frac{1}{2}(1-\cos\varphi_0)}{2v^2(1-\cos\varphi_0)}}) = \frac{v^2}{g}(1-\cos\varphi_0)(\sin\varphi_0 + 2\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi_0 + \frac{gy_0}{2v^2}})$$

$$\bar{x}_W = \frac{v^2}{g}(1-\cos\varphi_0)(\sin\varphi_0 + 2\sqrt{\frac{v^2\sin^2\varphi_0}{4v^2} + \frac{2gy_0}{4v^2}}) = \frac{v^2}{g}(1-\cos\varphi_0)(\frac{v}{v}\sin\varphi_0 + \frac{2}{2v}\sqrt{v^2\sin^2\varphi_0 + 2gy_0})$$

$$\bar{x}_W = \frac{v}{g}(1-\cos\varphi_0)(v\sin\varphi_0 + \sqrt{v^2\sin^2\varphi_0 + 2gy_0})$$

Die tatsächliche Wurfweite ergibt sich:

$$x_W = \bar{x}_W - x_0$$
$$x_W = \frac{v}{g}(1-\cos\varphi_0)(v\sin\varphi_0 + \sqrt{v^2\sin^2\varphi_0 + 2gy_0}) - x_0$$

Für die Wurfhöhe stellen wir die Auslenkung in y-Richtung in Abhängigkeit von der Zeit dar:

$$y(t) = v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$
$$\dot{y}(t) = v_0\sin\alpha - gt$$

Im höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit in y-Richtung Null: $\dot{y}(t) = 0$

$$\Rightarrow v_0\sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

Eingesetzt in $y(t)$ ergibt dies die gesuchte Wurfhöhe y_W

$$y_W = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + y_0$$

Einsetzen der Abwurfbedingungen:

$$y_W = \frac{2v^2(1-\cos\varphi_0)\frac{1}{2}(1+\cos\varphi_0)}{2g} + y_0 = \frac{v^2(1-\cos^2\varphi_0)}{2g} + y_0 = \frac{v^2\sin^2\varphi_0}{2g} + y_0$$

Der Sicherheitsabstand d ist gleich der maximalen Wurfweite des Spikes aus dem Ursprung des mitbewegten System mit dem Abwurfwinkel φ_0 und der Abwurfgeschwindigkeit v.

Die Gleichung dieser Wurfparabel lautet:

$$y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\varphi_0}x^2 + \tan\varphi_0 x$$

Die Wurfweite ist die positive Nullstelle dieser Parabel.

Berechnung der Wurfweite: $y = 0$

$$x(-\frac{g}{2v^2\cos^2\varphi_0}x + \tan\varphi_0) = 0$$
$$x_W = \frac{v^2\sin 2\varphi_0}{g}$$

Der Sinus eines Arguments kann maximal +1 werden,
somit erhält man die maximale Wurfweite $d = x_{W_{max}}$ für $\sin 2\varphi_0 = 1$ und das ergibt:

$$d = \frac{v^2}{g} = 124{,}9\,\mathrm{m}$$