Aufgabensammlung Mechanik

Jürgen Gilg[1]
Austr. 59
70376 Stuttgart

Januar 2004

[1]Tel.: 0711/59 27 88, E-Mail: gilligan01@worldonline.de

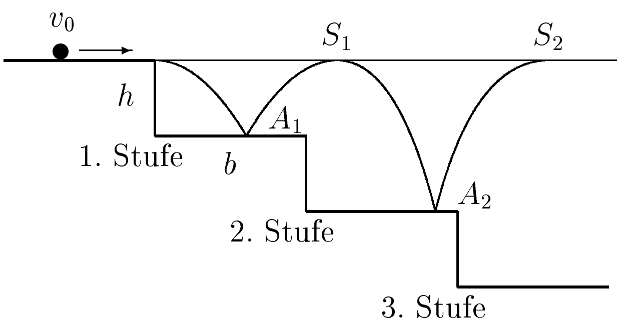
Aufgabe 1:

Ein Kugelstoßer stößt eine Kugel aus der Höhe H unter dem Winkel von φ mit der Horizontalen und der Geschwindigkeit v weg.

a) Welche Wurfhöhe $H_{\max}$ erreicht die Kugel und welche Zeit t_{flug} ist sie bis zum Aufschlagen auf dem Boden in der Luft?
Wie groß ist somit die Wurfweite W?

b) Unter welchem Winkel $\varphi_{\max}$ muß die Kugel abgestoßen werden, damit sie maximale Wurfweite $W_{\max}$ erreicht?
Wie ändert sich dieser Winkel, wenn $H = 0$ ist oder wenn $H \to \infty$ geht?

Aufgabe 2:



Ein punktförmig gedachter Ball bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0 auf der obersten Stufe (0. Stufe) einer Treppe mit der Stufenhöhe h und der Trittbreite b senkrecht auf die Trittkante zu und falle dann im freien Fall auf die 1. Stufe. Dort - und auf allen weiteren Stufen auch - werde er ideal reflektiert (d.h. Einfallswinkel = Ausfallswinkel und der Betrag der Auftreffgeschwindigkeit bleibt erhalten) und springe dann auf die 2. Stufe und so fort.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Aufschlagspunktes $A_n(x_{A,n}/y_{A,n})$ auf der n-ten Stufe unter der Voraussetzung, daß der Ball auf jeder vorhergehenden Stufe genau einmal aufspringt. Der Koordinatenursprung soll in der obersten Treppenkante liegen.

b) Berechnen Sie die Scheitelpunkte $S_n(x_{S,n}/y_{S,n})$ der Flugbahn.

c) Innerhalb welcher Grenzen ($v_{\min}$, $v_{\max}$) muß v_0 liegen, damit der Ball auf der 1. Stufe genau einmal aufspringt?

d) Zeigen Sie unter der Annahme $v_0 = v_{\min}$, daß der Ball auf den ersten 5 Stufen höchstens je einmal aufspringen kann und daß dieses Ergebnis unabhängig von h und b ist.

Anleitung:
Bei idealer Reflexion haben alle Scheitelpunkte der Bahn die gleiche Höhe $y_{S,n} = 0$. Gehen Sie aus von der Aufsprungzeit t_n auf der n-ten Stufe (Summierung der vorhergehenden Fall- und Steigzeiten).

Aufgabe 3:

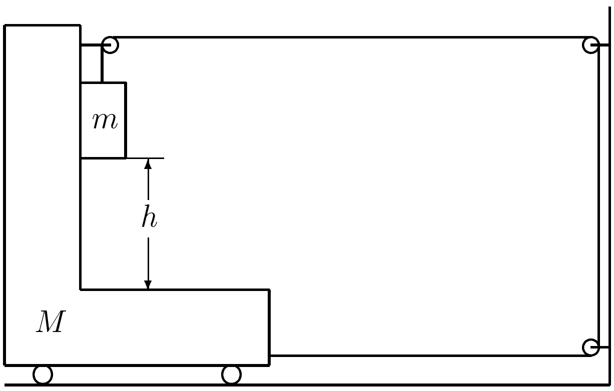
Ein Hobby-Bastler besitzt 2 Schraubenfedern SF_1 und SF_2 mit den jeweiligen Ruhelängen $l_1 = 2\,\mathrm{m}$ bzw. $l_2 = 1,5\,\mathrm{m}$ und den zugehörigen Federkonstanten $C_1 = 15\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ bzw. $C_2 = 30\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Er benötigt jedoch **eine** Ersatzfeder mit der neuen Gesamtruhelänge $s = 2\,\mathrm{m}$ und der Federkonstanten $C = 18\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Um diese herzustellen, schneidet er von SF_1 und SF_2 je ein Teilstück der Länge s_1 bzw. s_2 ab und schaltet diese hintereinander.

a) Wie lang sind die verwendeten Teilstücke s_1 und s_2?

b) Welche Energie E_{ges} ist in der neuen Feder enthalten, wenn sie auf eine Gesamtlänge von $s_{\mathrm{ges}} = 3\,\mathrm{m}$ gedenht wird, und wie verteilt sich die Gesamtenergie auf die Teilstücke?

Anleitung:
Stellen Sie die Teilstücke in der Form $s_1 = a \cdot l_1$ und $s_2 = b \cdot l_2$ dar und schreiben Sie die Gleichungen für die Gesamtlänge s und die neue Federkonstante C auf.

Aufgabe 4:

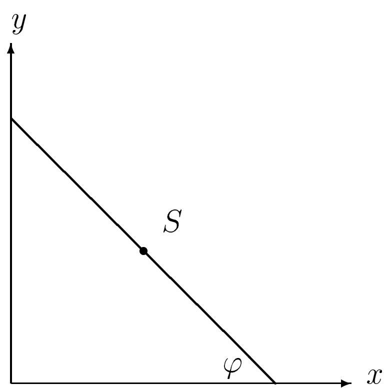


Zwei Massen M und m seien über Umlenkrollen durch ein masseloses, nicht dehnbares, flexibles Seil miteinander verbunden. Die Umlenkrollen seien masselos; an keiner Stelle des Systems treten Reibungskräfte auf. Die Masse m sei so geführt, daß sich jede horizontale Bewegung von M auf m überträgt. Das System werde zunächst so festgehalten, daß der Abstand zwischen der Unterkante von m und der Oberkante von M gerade h beträgt.

Läßt man das System los, so führt es eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus. Wie lange dauert der Beschleunigungsvorgang?

Aufgabe 5:

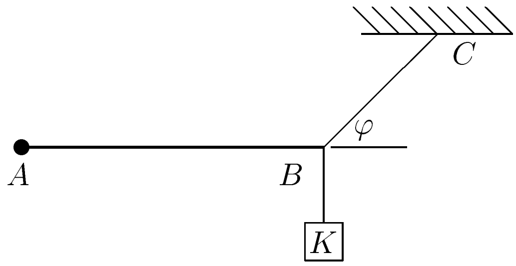
Ein homogener Stab der Länge L steht auf einem glatten ($\mu = 0$), horizontalen Boden senkrecht an eine glatte, senkrechte Wand gelehnt. Sein unteres Ende werde nun senkrecht von der Wand weg leicht ausgelenkt und dann stoßfrei losgelassen, so daß der Stab ohne Anfangsgeschwindigkeit frei fällt. Bei der Bewegung soll weder am Boden noch an der Wand Reibung auftreten. Berechnen Sie den Winkel φ_0, den der Stab mit dem Boden in dem Augenblick einschließt, in dem sich das obere Stabende gerade von der Wand löst.



Anleitung:
Benützen Sie den Energieerhaltungssatz und dessen zeitliche Ableitung.
Die Bedingung für den Ablösepunkt ist, daß - von diesem Augenblick an - der Stabschwerpunkt S in horizontaler Richtung keine weitere Beschleunigung erfährt.

In einem zweiten Versuch sei Reibung an der Wand und am Boden mit $0 < \mu < 1$. Bis zu welchem Winkel φ_1 bleibt der Stab stehen ohne zu gleiten?

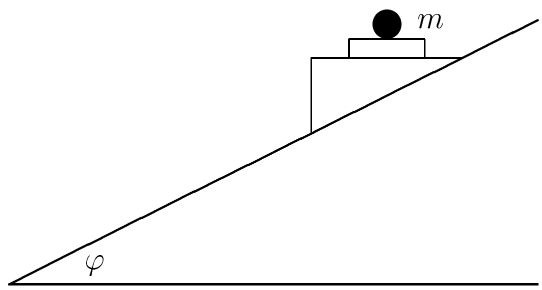
Aufgabe 6:



Der homogene Balken AB mit dem Eigengewicht G ist am Ende A reibungsfrei gelenkig gelagert und am Ende B durch ein Zusatzgewicht K belastet. Der Balken wird durch das masselose Seil BC in der horizontalen Lage gehalten.
Bestimmen Sie die Reaktionskraft R des Lagers in A (in Betrag und Richtung) und die Kraft T im Seil.

Aufgabe 7:

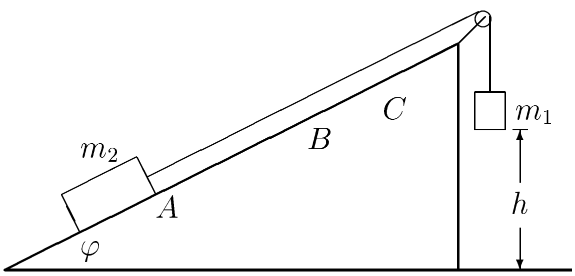
Ein Körper der Masse m liegt auf einer masselosen Waage, diese wiederum auf einem dreieckigen masselosen Keil, der auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel φ reibungsfrei gleiten kann. Zunächst sei der Keil festgehalten und die Waage zeigt ein Gewicht von $G = 80\,\mathrm{N}$ an.
Die Schnur wird abgeschnitten und das System gerät in Bewegung. Die Waage zeigt nun $G^{*} = 60\,\mathrm{N}$ an.



a) Welchen Neigungswinkel φ hat die schiefe Ebene?

b) Welches Gewicht G_μ hätte die Waage - bei einem Gleitreibungskoeffizienten zwischen Keil und schiefer Ebene von $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ - angezeigt?

Aufgabe 8:



Die beiden Körper K_1 und K_2 mit den Massen m_1 und m_2 (mit $m_1 > m_2$) sind zunächst in Ruhe, das masselose Seil ist gespannt. Die gezeichnete Anordnung stellt diesen Zustand dar. Es sei $\overline{AB} = h$

a) Die Körper setzen sich nun in Bewegung. Berechnen Sie ihre Beschleunigung, wenn für den auf der schiefen Ebene gleitenden Körper K_2 ein Reibungskoeffizient μ wirkt.

b) Nach welcher Zeit t_1 und mit welcher Geschwindigkeit v_1 schlägt der Körper K_1 auf dem um h tiefer liegenden Boden auf?

c) Nach dem Aufschlagen von K_1 auf dem Boden bewegt sich K_2 auf der schiefen Ebene von B bis C weiter und gleitet anschließend wieder zurück.
Berechnen Sie die Länge x der Strecke $\overline{BC}$, sowie die Geschwindigkeit v_B mit der K_2 wieder im Punkt B ankommt und berechnen Sie das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{v_1}{v_B}$.

d) Im Punkt B spannt sich das Seil ruckartig, da der Körper K_2 sich noch weiterbewegt und Körper K_1 mitreißt. Mit welcher Geschwindigkeit v_{gem} beginnen die beiden Körper diese Bewegung?

Aufgabe 9:

Wo liegt der Schwerpunkt eines geraden Stabes der Länge L von konstantem Querschnitt A, wenn die Dichte des Stabes vom Wert ρ_0 am einen Ende bis zum Wert $5\rho_0$ am anderen Stabende linear zunimmt?

Aufgabe 10:

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a und der Masse m rotiere um eine Achse, die durch eine Ecke des Dreiecks geht und senkrecht auf der Dreiecksfläche steht. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J des Dreiecks bezüglich dieser Achse.

Aufgabe 11:

Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ bezüglich der z-Achse. Es handelt sich hierbei um eine Kugel um den Ursprung mit dem Radius R, der Masse m und der konstanten Dichte ρ.

Aufgabe 12:

Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ bezüglich der z-Achse. Es handelt sich hierbei um eine Kugel um den Ursprung mit dem Radius R, der Masse m und der konstanten Dichte ρ.
Dies ist dieselbe Aufgabe, nur benützen Sie bei dieser Rechnung Kugelkoordinaten und entscheiden selbst, was für Sie einfacher zu rechnen ist.

Anleitung:
Benützen Sie die folgende Transformation in Kugelkoordinaten:
$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$, $dV = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi dr$
$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi = r^2 \sin^2\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2 \sin^2\vartheta$

Aufgabe 13:

Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts einer Halbkugel mit dem Radius R und der Masse m bei konstanter Dichte ρ.

Aufgabe 14:

Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment eines geraden Kreiskegels bezüglich seiner Symmetrieachse (z-Achse). Der Kreiskegel besitze die konstante Dichte ρ, die Masse m, die Höhe H und den Radius R.

Anleitung:
Benützen Sie die folgende Transformation in Zylinderkoordinaten:
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $dV = r\, dr d\varphi dz$
$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$

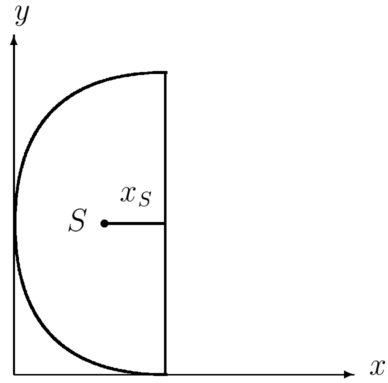
Mit den Grenzen des Kreiskegels von:
$0 \le r \le \frac{R}{H}z$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le H$

Aufgabe 15:

Berechnen Sie die Masse M einer Kugel vom Radius R, deren Dichte linear mit dem Abstand vom Mittelpunkt von 0 auf ρ_0 zunimmt.

Aufgabe 16:

Eine homogene Halbkugel mit dem Radius r soll entsprechend der Skizze auf ebenem Boden so aufgestellt werden, daß sich die Kugelfläche an der senkrechten Wand anlehnt und die ebene Fläche der Halbkugel zur Wand parallel ist. Der Haftreibungskoeffizient μ (mit $0 < \mu < 1$) sei an Wand und Boden gleich groß. Welchen Zahlenwert muß μ mindestens haben, damit die Halbkugel nicht abrutscht? Welche Kräfte (Betrag und Richtung) werden in diesem Fall von Boden und Wand auf die Halbkugel ausgeübt? ($x_S = \frac{3}{8}r$)



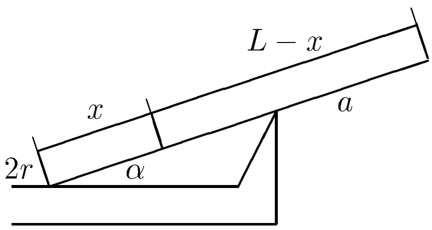
Aufgabe 17:

Am Rande einer kreisförmigen, horizontalen Schwungscheibe (Radius R, Masse M) mit vertikaler Drehachse durch den Scheibenmittelpunkt (keine Achsreibung in den Lagern) befinde sich ein Kind (Masse m). Das ganze System sei zunächst in Ruhe. Nun beginnt das Kind entlang des Randes der Scheibe im Kreis zu laufen. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe in dem Augenblick, in dem die Relativgeschwindigkeitkeit des Kindes zum Rand den Wert v_{rel} hat? Wie groß ist dann die in der Scheibe enthaltene Rotationsenergie?

Aufgabe 18:

Ein homogener Zylinder der Masse m, konstanter Dichte ρ mit seiner Symmetrieachse in z-Richtung hat eine Länge H, einen Radius R und seinen Schwerpunkt S im Ursprung. Dieser rotiere um die x-Achse. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment dieses Zylinders bezüglich der gegebenen Achse.

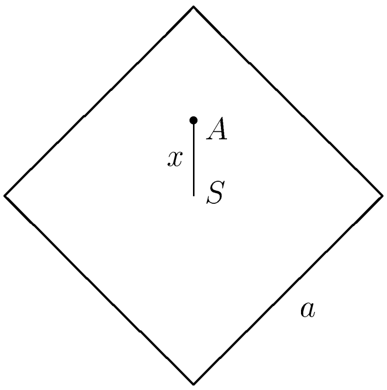
Aufgabe 19:



Ein unachtsamer Raucher legt seine eben erst angezündete filterlose Zigarette (Durchmesser $2r$, Länge L) so in einen Aschenbecher, daß sie unter dem Winkel α geneigt ist und mit einem Stück der Länge a nach außen ragt. Wie lange wird es dauern, bis die Zigarette kippt, falls die Asche nicht abbricht?

Zur Vereinfachung der Rechnung sei angenommen, daß der veraschte Teil der Zigarette (Länge x) die ursprüngliche Gestalt aufweise. Die konstante Glimmgeschwindigkeit sei u und das Verhältnis der Dichten von Asche und Tabak sei $k < 1$.
Zahlenwerte: $L = 7\,\text{cm}$, a $= 2,8\,\text{cm}$, u $= 0,5\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$, r $= 0,35\,\text{cm}$, $\alpha = 11°19'$, k $= 0,3$

Aufgabe 20:



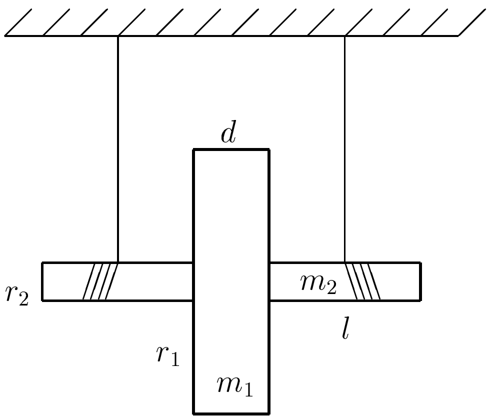
Eine ebene, quadratische, homogene, dünne Platte mit der Seitenlänge a und dem Massenträgheitsmoment $J_S = \frac{1}{6}ma^2$ bezüglich einer zu ihr senkrecht verlaufenden reibungsfreien Achse durch ihren Schwerpunkts S soll im Schwerefeld der Erde kleine Schwingungen - als physikalisches Pendel - um eine um x verschobene, parallele Achse durch A ausführen.

a) Wie groß muß der Abstand x zwischen Schwerpunkt S und Drehpunkt A gewählt werden, damit die Schwingungsdauer $T(x)$ minimal wird?

b) Wie groß ist $T_{\min}$?

c) Geben Sie alle weiteren Durchstoßpunkte paralleler Achsen mit der Platte an, für die sich dieselbe Schwingungsdauer $T_{\min}$ ergibt?

Aufgabe 21:



Eine runde, homogene Stahlscheibe mit einem Radius von $r_1 = 20\,\text{cm}$ und einer Dicke von $d = 2\,\text{cm}$ ist auf eine Achse mit dem Radius $r_2 = 2\,\text{cm}$ gleichen Materials aufmontiert, so daß die Achse links und rechts je mit der Länge $l = 20\,\text{cm}$ heraussteht. Auf beiden Seiten der Achse wird je ein masseloser Faden gleichsinnig aufgewickelt und danach mit seinen Enden an der Decke befestigt.

Berechnen Sie die Fallgeschwindigkeit v_S der Scheibe, nachdem sie eine Höhe $\Delta h = 1\,\text{m}$ durchfallen hat und vergleichen Sie diese mit der Geschwindigkeit v_{frei}, die der Körper im freien Fall erreicht hätte. Welcher Bruchteil der gesamten Energie steckt dabei in der Rotation?

Aufgabe 22:

Ein zunächst ruhender Eimer der Masse M wird mittels eines Seils mit konstanter Kraft F in einem Ziehbrunnen hochgezogen. Zu Anfang enthält der Eimer eine Wassermenge m_0, aber durch ein seitliches Loch strömt eine pro Zeiteinheit konstante Wassermenge wieder aus, so daß der Eimer nach der Zeit T leer ist. Der Eimer soll innerhalb der Zeit T den oberen Rand des Brunnens noch nicht erreicht haben. Wie groß ist die Geschwindigkeit v_E des Eimers zur Zeit T, wenn die Kraft F gerade so groß ist, daß die Bewegung mit der Beschleunigung $a(0) = 0$ beginnt?

Aufgabe 23:

Eine masselose Schraubenfeder (natürliche Länge $l_0 = 2\,\mathrm{m}$, Federkonstante $C = 2,5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$) wird zwischen zwei festen Punkten A und B (Abstand $d = 3\,\mathrm{m}$) auf einer glatten, horizontalen Unterlage eingehängt. In der Mitte der Feder sei eine punktförmige Masse $m = 0,1\,\mathrm{kg}$ befestigt, die sich reibungsfrei auf der Unterlage verschieben läßt. Die Masse m werde nun um $a = 3\,\mathrm{cm}$ in Richtung der Verbindungslinie AB aus der Ruhelage gezogen und dann stoßfrei mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ losgelassen.
Berechnen Sie die Zeit t_1, die die Masse m zum Durchlaufen des ersten Zentimeters seiner Bahn nach dem Loslassen benötigt.

Aufgabe 24:

Gegeben sei ein symmetrischer Kreiskegel (erzeugender Winkel $\alpha = 45°$), dessen Achse vertikal stehe. Auf der Verlängerung der Kegelachse befinde sich im Abstand x oberhalb von der Kegelspitze der Punkt A, in dem mit einem masselosen, nicht dehnbaren Faden der Länge l (mit $0 \leq x \leq l$) eine Punktmasse m aufgehängt sei. Die Masse m liegt auf dem Kegelmantel auf.

a) Berechnen Sie den Betrag der Kraft T im Faden (Fadenspannung) als Funktion von x und die vom Kegel auf die Masse m ausgeübte Kraft N.

b) Wird der Punkt A von $x = 0$ bis $x = l$ auf der vertikalen Achse verschoben, so muß dabei Arbeit verrichtet werden. Berechnen Sie die erforderliche Arbeit.

Aufgabe 25:

Zwischen zwei auf gleicher Höhe liegenden Punkten A und B (Abstand $d = 3\,\mathrm{m}$) sei eine masselose Schraubenfeder (natürliche Länge $l_0 = 2\,\mathrm{m}$) eingehängt. Im Mittelpunkt der Strecke AB werde nun eine Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ auf die Feder aufgesetzt und stoßfrei mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ losgelassen.

a) Berechnen Sie die Federkonstante C dieses Systems unter der Annahme, daß die Masse m nach Durchfallen der Strecke $\Delta h = 0,8\,\mathrm{m}$ wieder zur Ruhe kommt.
(Unterer Umkehrpunkt der Schwingung)

b) Welche Kraft $\vec{F}$ (Betrag und Richtung) wirkt im unteren Umkehrpunkt der Schwingung auf die Masse m?

Aufgabe 26:

Durch die Erde sei entlang ihrer Rotatiosachse ein Loch gebohrt. Am Nordpol lasse ein Mann aus der Ruhe heraus einen Stein in dieses Loch fallen.
Wie lange muß er warten, bis er den Stein wieder auffangen kann?
(Zur Berechnung sei angenommen, daß die Erde eine homogene Kugel mit der Dichte ρ sei und der Stein keinerlei Reibungskräfte erfahre)
Die gefundene Zeit soll verglichen werden mit der Umlaufzeit eines erdnahen Satelliten auf einer Kreisbahn.
(Bahnradius ist gleich Erdradius und es soll keine Luftreibung berücksichtigt werden)

Aufgabe 27:

Mit welcher Mindestgeschwindigkeit v_0 müßte ein Körper (konstante Masse m) von der Erdoberfläche aus senkrecht abgeschossen werden, damit er auf den Mond trifft?
Mit welcher Geschwindigkeit v_1 trifft er dann auf dem Mond auf?
Verwenden Sie zur Berechnung folgende Daten:
Erde und Mond seien kugelförmig und Luftreibung werde vernachlässigt
Abstand der Mittelpunkte von Erde und Mond: $d = 3,8 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
Erdradius: $R_E = 6,37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$
Erdmasse: $M_E = 5,98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Mondradius: $R_M = \frac{R_E}{4}$
Mondmasse: $M_M = \frac{M_E}{81}$
Gravitationskonstante: $f = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$

Lösung zu Aufgabe 1:

Ein schiefer Wurf ist eine zweidimensionale Bewegung. Man wählt zwei aufeinander senkrechte Koordinaten x (nach rechts positiv) y (nach oben positiv). Der schiefe Wurf teilt sich in zwei voneinander unabhängige, senkrecht zueinander stehende Bewegungen auf. Bildet die Abwurfgeschwindigkeit v einen Winkel $0° < \varphi < 90°$ mit der Horizontalen, so zerlegt man diese in ihre Komponenten:

$$v_x = v\cos\varphi$$
$$v_y = v\sin\varphi$$

In x-Richtung: Gleichförmige Bewegung mit der Horizontalgeschwindigkeit $v_x = v\cos\varphi$
In y-Richtung: Senkrechter Wurf nach oben mit Vertikalanfangsgeschwindigkeit $v_y = v\sin\varphi$ und der Abwurfhöhe H

$$x(t) = v_x t = (v\cos\varphi)\cdot t$$
$$y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_y t + H = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v\sin\varphi)\cdot t + H$$

Für die Geschwindigkeiten in der jeweiligen Koordinatenrichtung gilt:

$$v_x(t) = v\cos\varphi$$
$$v_y(t) = v\sin\varphi - gt$$

Der Scheitel liegt bei:

$$S(\underbrace{\frac{v^2\sin 2\varphi}{2g}}_{X_S>0} / \underbrace{\frac{v^2\sin^2\varphi}{2g} + H}_{Y_S>0})$$

Die **Steigzeit** beträgt: $T_S = \dfrac{v\sin\varphi}{g}$

a) Die maximale Höhe ist $H_{\max} = \dfrac{v^2\sin^2\varphi}{2g} + H$ und die Steigzeit $T_S = \dfrac{v}{g}\sin\varphi$

Im Scheitel ist die Vertikalgeschwindigkeit $v_y = 0$ und somit ist die Zeit, die die Kugel bis zum Boden benötigt gerade die des freien Falls aus der Höhe $H_{\max}$
Die Fallzeit ist somit:

$$T_F = \sqrt{\frac{2H_{\max}}{g}} = \sqrt{\frac{2(\frac{v^2\sin^2\varphi}{2g} + H)}{g}} = \frac{v}{g}\sqrt{\frac{2gH}{v^2} + \sin^2\varphi}$$

Wir führen die Abkürzung $\alpha = \dfrac{2gH}{v^2}$ ein und die gesamte Flugzeit ist somit:

$$t_{\text{flug}} = T_S + T_F = \frac{v}{g}\sin\varphi + \frac{v}{g}\sqrt{\alpha + \sin^2\varphi} = \frac{v}{g}(\sin\varphi + \sqrt{\alpha + \sin^2\varphi})$$

Somit ergibt sich die Wurfweite zu:

$$W = x(t_{\text{flug}}) = v\cos\varphi\cdot t_{\text{flug}} = \frac{v^2}{g}\cos\varphi(\sin\varphi + \sqrt{\alpha + \sin^2\varphi})$$

$$W = \frac{v^2}{g}\cos\varphi(\sin\varphi + \sqrt{\alpha + \sin^2\varphi})$$

b) Ersetze φ durch x

Die maximale Wurfweite ist das Maximum der Funktion

$W(x) = \frac{v^2}{g} \cos x(\sin x + \sqrt{\alpha + \sin^2 x})$

Also bestimmen wir die erste Ableitung der Funktion $W(x)$ nach x und setzen diese Null:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{v^2}{g}\left(-\sin x(\sin x + \sqrt{\alpha+\sin^2 x}) + \cos x(\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\alpha+\sin^2 x}})\right)$$

Zur besseren Übersicht substituieren wir die Wurzel: $\mu = \sqrt{\alpha + \sin^2 x}$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{v^2}{g}\left(-\sin x(\sin x + \mu) + \cos x(\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\mu})\right)$$

Weiteres Erweitern und ausmultiplizieren liefert:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{v^2}{g}\left(\frac{-\sin^2 x\mu - \sin x\mu^2 + \cos^2 x\mu + \sin x\cos^2 x}{\mu}\right)$$

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{v^2}{g}\left(\frac{\sin x\mu^2 + (\sin^2 x - \cos^2 x)\mu - \sin x\cos^2 x}{\mu}\right)$$

Faktorisieren des Zählers:

$$\sin x\mu^2 + (\sin^2 x - \cos^2 x)\mu - \sin x\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{-(\sin^2 x - \cos^2 x) \pm \sqrt{(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + 4\sin^2 x\cos^2 x}}{2\sin x}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\sin^2 x - \cos^2 x) \pm \sqrt{\sin^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x}}{2\sin x}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\sin^2 x - \cos^2 x) \pm \sqrt{\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}}{2\sin x}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\sin^2 x - \cos^2 x) \pm \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}}{2\sin x}$$

$$\mu_1 = -\sin x \qquad \mu_2 = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

Die Faktorisierung ist also:

$$\sin x\mu^2 + (\sin^2 x - \cos^2 x)\mu - \sin x\cos^2 x = \sin x(\mu + \sin x)(\mu - \frac{\cos^2 x}{\sin x})$$

$$\sin x\mu^2 + (\sin^2 x - \cos^2 x)\mu - \sin x\cos^2 x = (\mu + \sin x)(\sin x\mu - \cos^2 x)$$

Die Ableitung Null gesetzt liefert somit:
$$-\frac{v^2}{g}\frac{(\mu+\sin x)(\sin x\mu-\cos^2 x)}{\mu}=0 \Leftrightarrow (\mu+\sin x)(\sin x\mu-\cos^2 x)=0$$
Dies liefert mit dem Satz vom Nullprodukt folgende trigonometrische Gleichungen:

1. Faktor gleich Null:
$\mu+\sin x=0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha+\sin^2 x}=-\sin x$
$\alpha+\sin^2=\sin^2 x \Rightarrow \alpha=0$, das macht keinen Sinn.

2. Faktor gleich Null:
$\sin x\mu-\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \sin x\sqrt{\alpha+\sin^2 x}=\cos^2 x$ mit $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ folgt:

$$\sin x\sqrt{\alpha+\sin^2 x}=1-\sin^2 x$$

$$\sin^2 x(\alpha+\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\sin^4 x$$

$$\sin^2 x\alpha=1-2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x=\sqrt{\frac{1}{2+\alpha}}$$

Oder anders ausgedrückt:
$$\Rightarrow \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}$$

Sämtliche Rücksubstitutionen durchgeführt ergeben somit für den Winkel $\varphi_{\max}$, bei dem die Wurfweite maximal ist:

$$\sin\varphi_{\max}=\sqrt{\frac{1}{2+\frac{2gH}{v^2}}}$$

Setzt man $H=0$, d.h. Abwurfhöhe ist gleich der Landehöhe, so folgt:

$$\sin\varphi_{\max}=\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \varphi_{\max}=45^\circ$$

Läßt man $H\to\infty$ gehen, d.h. sehr große Abwurfhöhe, so folgt:

$$\sin\varphi_{\max}=0 \Rightarrow \varphi_{\max}=0^\circ$$

Das bedeutet allgemein:
Schießt man vom Boden, so ist der optimale Winkel 45° und je höher man abschießt, umso kleiner der Abschußwinkel, bis er im Grenzfall sehr großer Abwurfhöhen gegen Null geht (waagrechter Wurf erzielt größte Weite).

Die maximale Wurfweite erhält man wie folgt:

$$W(\varphi_{\max}) = W_{\max} = \frac{v^2}{g}\sqrt{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}\left(\sqrt{\frac{1}{2+\alpha}} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{2+\alpha}}\right)$$

$$W_{\max} = \frac{v^2}{g}\sqrt{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}\left(\sqrt{\frac{1}{2+\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha(2+\alpha)+1}{2+\alpha}}\right)$$

$$W_{\max} = \frac{v^2}{g}\sqrt{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}\left(\sqrt{\frac{1}{2+\alpha}} + \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{2+\alpha}}\right)$$

$$W_{\max} = \frac{v^2}{g}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}\sqrt{\frac{1}{2+\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}\sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{2+\alpha}}\right)$$

$$W_{\max} = \frac{v^2}{g}\frac{1}{2+\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha} + (1+\alpha)\sqrt{1+\alpha}\right) = \frac{v^2}{g}\frac{\sqrt{1+\alpha}}{2+\alpha}\left(1+(1+\alpha)\right)$$

$$W_{\max} = \frac{v^2}{g}\sqrt{1+\alpha}$$

Alles rücksubstituiert:

$$W_{\max} = \frac{v^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gH}{v^2}}$$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Die Fallzeit für den Ball von S_0 bis A_1 auf der 1. Stufe: $h = \frac{1}{2}gt_1^2$

$t_1 = \sqrt{1}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Die Fallzeit für den Ball von S_1 bis A_2 auf der 2. Stufe: $2h = \frac{1}{2}gt_2^2$

$t_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Die Fallzeit für den Ball von S_{n-1} bis A_n auf der n-ten Stufe: $nh = \frac{1}{2}gt_n^2$

$t_n = \sqrt{n}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Die gleichförmige Geschwindigkeit v_0 wirkt dauernd in horizontaler Richtung x

Für die Auftreffpunkte A_n gilt:

$x_{A,1} = t_1 v_0$

$x_{A,2} = 2t_1 v_0 + t_2 v_0$

$x_{A,n} = 2t_1 v_0 + 2t_2 v_0 + 2t_3 v_0 + \cdots + 2t_{n-1} v_0 + t_n v_0$

$x_{A,n} = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\left[2(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n-1})+\sqrt{n}\right]$

$x_{A,n} = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\left[2\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}+\sqrt{n}\right] \qquad y_{A,n} = -nh$

b) Für die Scheitelpunkte S_n gilt:

$x_{S,1} = 2t_1 v_0$

$x_{S,2} = 2t_1 v_0 + 2t_2 v_0$

$x_{S,n} = 2t_1 v_0 + 2t_2 v_0 + 2t_3 v_0 + \cdots + 2t_n v_0 = 2v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\left[\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right]$

$x_{S,n} = 2v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \qquad y_{S,n} = 0$

c) Die maximale Geschwindigkeit erhält man, wenn der erste Auftreffpunkt am Ende der 1. Stufe liegt.

$v_{\max}$ für $x_{A,1} = b$

$x_{A,1} = v_{\max}\sqrt{\frac{2h}{g}} = b \Rightarrow v_{\max} = b\sqrt{\frac{g}{2h}}$

Die minimale Geschwindigkeit erhält man, wenn der zweite Auftreffpunkt am Ende der 1. Stufe liegt.

$v_{\min} = \frac{1}{3}v_{\max} = \frac{b}{3}\sqrt{\frac{g}{2h}}$

$\frac{b}{3}\sqrt{\frac{g}{2h}} \le v_0 \le b\sqrt{\frac{g}{2h}}$

d) Damit der Ball pro Stufe jeweils nur einmal aufschlägt (und dies möglichst häufig passiert), also Start des Balls mit $v_{\min}$, muß gelten: $x_{A,n} \le nb$ mit $v_0 = v_{\min}$

$\frac{b}{3}\sqrt{\frac{g}{2h}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}(2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\cdots+2\sqrt{n-1}+\sqrt{n}) \le nb \qquad | \cdot \frac{3}{b}$

(1) $\qquad 2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\cdots+2\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \le 3n$

Für $n = 5$ ist die Ungleichung (1) gerade noch erfüllt:

$\underbrace{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{4}+\sqrt{5}}_{14{,}53} \le 15$

Für $n = 6$ gilt die Ungleichung (1) nicht mehr.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Bei der Hintereinanderschaltung von Federn erfolgt bei der gleichen Kraft F eine größere Auslenkung. Die Federkonstanten der neuen Teilfedern bezeichnen wir mit C_1^* und C_2^*
$F = \text{const.}$
$C_1 l_1 = F$
$C_1^* s_1 = C_1^* a l_1 = F \Rightarrow C_1^* = \frac{1}{a} C_1$
Analog folgt hieraus: $C_2^* = \frac{1}{b} C_2$
Für die neue Gesamtruhelänge s gilt:
(1) $\quad l_1 a + l_2 b = s$
Für die neue Federkonstante C gilt:
$\frac{1}{C_1^*} + \frac{1}{C_2^*} = \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{C_1} a + \frac{1}{C_2} b = \frac{1}{C}$
ohne Brüche folgt:
(2) $\quad C C_2 a + C C_1 b = C_1 C_2$
Werte eingesetzt in Gleichung (1):
$2a + 1{,}5b = 2$
$\Rightarrow 4a + 3b = 4$
Werte eingesetzt in Gleichung (2):
$540a + 270b = 450$
$\Rightarrow 6a + 3b = 5$
Subtraktion der Gleichungen liefert $a = \frac{1}{2}$
Einsetzen von a in (1) liefert $b = \frac{2}{3}$
Hieraus ergeben sich die neuen Teilruhelängen der Federn zu:
$s_1 = a l_1 = 1\,\text{m}$ und $s_2 = b l_2 = 1\,\text{m}$

b) Die neuen Teilfederkonstanten sind somit:
$C_1^* = \frac{1}{a} C_1 = 30\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ $\qquad \mathrm{C}_2^* = \frac{1}{\mathrm{b}} \mathrm{C}_2 = 45\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$
x_1^* ist die **zusätzliche Dehnung** der Feder 1 aus ihrer neuen Ruhelänge $s_1 = 1\,\text{m}$
x_2^* ist die **zusätzliche Dehnung** der Feder 2 aus ihrer neuen Ruhelänge $s_2 = 1\,\text{m}$
Die **zusätzliche Gesamtdehnung** der Ersatzfeder ist $x^* = s_{\text{ges}} - s_1 - s_2 = 1\,\text{m}$
$x^* = x_1^* + x_2^*$
(1) $\quad x_1^* + x_2^* = 1$
Es gilt für die Dehnungen der Federn mit $F = \text{const.}$:
$C_1^* x_1^* = C_2^* x_2^* \Rightarrow \frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{C_2^*}{C_1^*} \Rightarrow x_1^* = \frac{3}{2} x_2^*$
(2) $\quad x_1^* = \frac{3}{2} x_2^*$
Die Gleichungen (1) und (2) ergeben:
$x_1^* = 0{,}6\,\text{m}$ und $x_2^* = 0{,}4\,\text{m}$

Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der Summe der Teilenergien der Federn:
$E_{\text{ges}} = E_1 + E_2$
$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} C x^{*2} = \frac{1}{2} 18 \cdot 1^2 = 9\,\text{J}$
$E_1 = \frac{1}{2} C_1^* x_1^{*2}$
$E_2 = \frac{1}{2} C_2^* x_2^{*2}$

Dies eingesetzt in E_1 liefert:
$E_1 = 5{,}4\,\text{J}$
$E_2 = E_{\text{ges}} - E_1 = 3{,}6\,\text{J}$

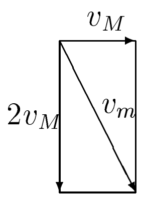
Lösung zu Aufgabe 4:

Die Rolle an M wirkt als lose Rolle. Dies hat zur Folge, daß die Vertikalbeschleunigung (Vertikalgeschwindigkeit) von m doppelt so groß ist wie die Horizontalbeschleunigung (Horizontalgeschwindigkeit) von M.

Wir bezeichnen die Horizontalbeschleunigung von M mit a_M und die Horizontalgeschwindigkeit von M mit v_M
Wir bezeichnen die Vertiktalbeschleunigung von m mit $a_{m,\,\mathrm{vert}}$ und die Vertikalgeschwindigkeit von m mit $v_{m,\,\mathrm{vert}}$

Somit gilt also:
$a_{m,\,\mathrm{vert}} = 2a_M$
$v_{m,\,\mathrm{vert}} = 2v_M$

Für die kleine Masse m gilt:



Mit dem Satz des Pythagoras folgt:
$v_m^2 = (v_M)^2 + (2v_M)^2 \Rightarrow v_m^2 = 5v_M^2$
$v_m = v_M\sqrt{5}$

Der Energieerhaltungssatz liefert:
$mgh = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}m(\sqrt{5}v_M)^2$

$$\Rightarrow v_M = \sqrt{\frac{m}{M+5m}}\sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow v_{m,\,\mathrm{vert}} = 2v_M = 2\sqrt{\frac{m}{M+5m}}\sqrt{2gh}$$

Für die gleichmäßig beschleunigte vertikale Bewegung der Masse m gilt:
$h = \frac{1}{2}a_{m,\,\mathrm{vert}}t^2$
$v_{m,\,\mathrm{vert}} = a_{m,\,\mathrm{vert}}t$

Die Elimination von $a_{m,\,\mathrm{vert}}$ liefert:
$h = \frac{1}{2}v_{m,\,\mathrm{vert}}t = v_M t$

$$\Rightarrow t = \frac{h}{v_M} = \frac{h}{\sqrt{\frac{m}{M+5m}}\sqrt{2gh}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{M+5m}{m}}\sqrt{\frac{h}{2g}}$$

Lösung zu Aufgabe 5:

Das Nullniveau sei auf Höhe des Bodens.
Es sei $\varphi = \varphi(t)$ der Winkel, den der Stab mit dem Boden einschließt. Die Winkelgeschwindigkeit des Stabs um seinen Schwerpunkt ist damit $\dot{\varphi}$ und die Winkelbeschleunigung des Stabs ist damit $\ddot{\varphi}$.
Für den Ort $\vec{x}_S$, die Geschwindigkeit $\vec{v}_S = \dot{\vec{x}}_S$ und die Beschleunigung $\vec{a}_S = \ddot{\vec{x}}_S$ des Stabschwerpunktes S gilt:

$$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \frac{L}{2} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}_S = \dot{\vec{x}}_S = \begin{pmatrix} v_{S_x} \\ v_{S_y} \end{pmatrix} = \frac{L}{2}\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$\vec{a}_S = \ddot{\vec{x}}_S = \begin{pmatrix} a_{S_x} \\ a_{S_y} \end{pmatrix} = \frac{L}{2} \left[\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} - \dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right]$$

Für die Höhe des Stabschwerpunktes S über dem NN gilt:
$y_S = \frac{L}{2}\sin\varphi$
Es gilt für den Betrag der Schwerpunktsgeschwindigkeit:
$v_S = |\dot{\vec{x}}_S| = \frac{L}{2}\dot{\varphi}$
Das Massenträgheitsmoment des Stabs bezüglich seines Schwerpunkts ist:
$J_S = \frac{1}{12}mL^2$

Mit dem Energieerhaltungssatz folgt:
$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\dot{\varphi}^2 + mgy_S$

Alle obigen Werte eingesetzt und zusammengefaßt liefert:
(1) $\quad mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}mL^2\dot{\varphi}^2 + mg\frac{L}{2}\sin\varphi \qquad | \cdot \frac{6}{mL^2}$

Diese Gleichung nach $\dot{\varphi}^2$ aufgelöst ergibt:
(2) $\quad \dot{\varphi}^2 = 3\frac{g}{L}(1 - \sin\varphi)$

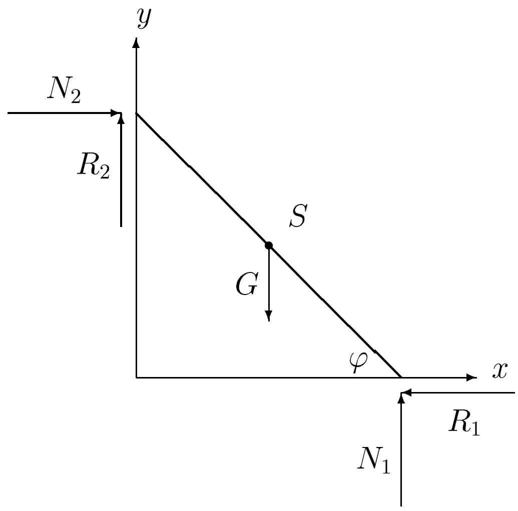
Differenzieren der Gleichung (1) nach der Zeit ergibt:
$0 = \frac{1}{3}mL^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mg\frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad | \cdot \frac{3}{mL^2\dot{\varphi}}$

Auflösen dieser Gleichung nach $\ddot{\varphi}$ ergibt:
(3) $\quad \ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2L}\cos\varphi$

Die Ablösebedingung lautet:
$a_{S_x} = 0$
$\frac{L}{2}(-\ddot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi) = 0$

Gleichungen (2) und (3) in diese Bedingungen eingesetzt liefert:
(4) $\quad \frac{3g}{2L}\cos\varphi\sin\varphi - 3\frac{g}{L}(1 - \sin\varphi)\cos\varphi = 0 \qquad | \cdot \frac{L}{3g\cos\varphi}$

Vereinfachen der Gleichung (4) liefert mit $\varphi = \varphi_0$:
$\sin\varphi_0 = \frac{2}{3}$



Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung fordert:

$\sum \vec{F}_x = \vec{0}$ (1) $N_2 - R_1 = 0 \Rightarrow N_2 = R_1$

$\sum \vec{F}_y = \vec{0}$ (2) $-G + R_2 + N_1 = 0$

Momentengleichgewicht um den Schwerpunkt S fordert:

$\sum \vec{M}_S = \vec{0}$ (3) $N_1 \frac{L}{2} \cos\varphi - R_1 \frac{L}{2} \sin\varphi - N_2 \frac{L}{2} \sin\varphi - R_2 \frac{L}{2} \cos\varphi = 0 \quad | \cdot \frac{2}{L}$

Für die Reibungskräfte gilt:

$R_1 = \mu N_1$
$R_2 = \mu N_2$
mit (1) folgt:
$R_2 = \mu R_1 = \mu^2 N_1$

Und es gilt nach (1):
$N_2 = R_1 = \mu N_1$

Diese Bedingungen in (3) eingesetzt liefert:

$N_1 \cos\varphi - \mu N_1 \sin\varphi - \mu N_1 \sin\varphi - \mu^2 N_1 \cos\varphi = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$

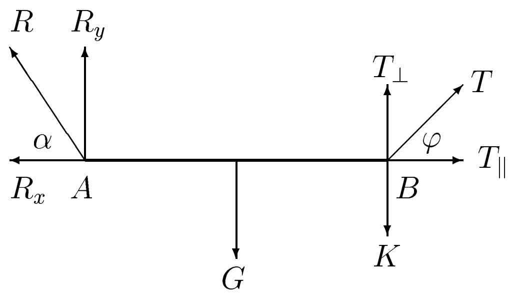
$N_1 - \mu \tan\varphi N_1 - \mu \tan\varphi N_1 - \mu^2 N_1 = 0$

$N_1(1 - 2\mu \tan\varphi - \mu^2) = 0$

Mit $\varphi = \varphi_1$ folgt für den Winkel:

$$\tan\varphi_1 = \frac{1-\mu^2}{2\mu}$$

Lösung zu Aufgabe 6:



Es gilt:

$\overline{AB} = a$
$T_\| = T\cos\varphi$
$T_\perp = T\sin\varphi$

Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung fordert:

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \qquad (1) \qquad -R_x + T\cos\varphi = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \qquad (2) \qquad R_y - G - K + T\sin\varphi = 0$$

Momentengleichgewicht um den Drehpunkt A fordert:

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \qquad (3) \qquad -\tfrac{a}{2}G - aK + aT\sin\varphi = 0 \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{a}$$

Aus (3) folgt:

$$T = \frac{\frac{G}{2} + K}{\sin\varphi}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$R_x = T\cos\varphi$$
$$R_y = \frac{G}{2}$$

Hieraus ergibt sich die Reaktionskraft R mit:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{T^2\cos^2\varphi + \tfrac{1}{4}G^2}$$

Und für den Winkel der Reaktionskraft mit der Balkenachse:

$$\tan\alpha = \frac{G}{2T\cos\varphi}$$

Lösung zu Aufgabe 7:

a) In Ruhe - also bei festgehaltenem Keil - zeigt die Waage die Gewichtskraft des Körpers an:
$G = mg$

Wird das System losgelassen, so erfährt es durch die Hangabtriebskraft eine Beschleunigung hangabwärts. Diese Beschleunigung ist:
$a = g \sin\varphi$

Bei der Abwärtsbewegung wird der Körper wegen seiner Trägheit leichter - genau um den Betrag seiner Trägheitskraft in vertikaler Richtung. Die Trägheitskraft in vertikaler Richtung beträgt:
$F_{\text{Träg}} = ma_{\text{vert}}$ mit $a_{\text{vert}} = a \sin\varphi = g \sin^2\varphi$

Hieraus folgt:
$G^* = G - F_{\text{Träg}} = mg - mg \sin^2\varphi = mg \cos^2\varphi = G \cos^2\varphi$

$\frac{G^*}{G} = \cos^2\varphi = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 30°$

b) Mit Reibung ergibt sich eine Beschleunigung hangabwärts zu:
$a_\mu = g(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)$

Die Vertikalkomponente dieser Beschleunigung ist:
$a_{\mu,\,\text{vert}} = a_\mu \sin\varphi = g(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)\sin\varphi = g(\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\mu \sin 2\varphi)$

Es gilt für die Kraft, die die Waage nun anzeigt mit $\varphi = 30°$ und $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$:
$G_\mu = G - ma_{\mu,\,\text{vert}} = mg(1 - \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\mu \sin 2\varphi) = mg(\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\mu \sin 2\varphi)$

Setzt man nun noch alle Werte ein, ergibt sich:
$G_\mu = 80\,\text{N}(\cos^2 30° + \frac{1}{4\sqrt{3}} \sin 60°) = 80\,\text{N}(\frac{3}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}) = 70\,\text{N}$

Lösung zu Aufgabe 8:

a) Die beschleunigende Kraft ist:
$F = F_{G_1} - F_{H_2} - F_{R_2} = F_{G_1} - F_{H_2} - \mu F_{N_2} = m_1 g - m_2 g \sin\varphi - \mu m_2 g \cos\varphi$
$F = (m_1 - m_2(\sin\varphi - \mu\cos\varphi))g$

Die beschleunigte Masse ist:
$m = m_1 + m_2$

So gilt nach Newton für die Beschleunigung:
$$a = \frac{m_1 - m_2(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)}{m_1 + m_2} g$$

b) Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung von A nach B mit der Beschleunigung a gelten folgende Bewegungsgleichungen:
$x = \frac{1}{2}at^2$
$v = at$

So folgt für die Zeit t_1, bei der der Körper K_1 den Boden erreicht:
$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

Die Geschwindigkeit v_1 erhält man:
$v_1 = at_1 = \sqrt{2ah}$

c) Der Körper K_2 gleitet von B mit der Anfangsgeschwindigkeit v_2 bergauf bis er im Punkt C zur Ruhe kommt, mit $\overline{BC} = x$, dabei wird er um $\Delta h = x\sin\varphi$ angehoben und verbraucht die Reibungsenergie $W_R = F_{R_2}x$
Nach dem Energieerhaltungssatz folgt:
$\frac{1}{2}m_2 v_1^2 = \mu m_2 g x \cos\varphi + m_2 g x \sin\varphi$

$$\Rightarrow x = \frac{v_1^2}{2g(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)} \qquad (1)$$

Beim Herabgleiten von Punkt C überwindet er abermals die Höhe $\Delta h = x\sin\varphi$ und verbraucht wiederum die Reibungsenergie $W_R = F_{R_2}x$ und kommt im Punkt B mit der Geschwindigkeit v_B an.
Nach dem Energieerhaltungssatz folgt:
$m_2 g x \sin\varphi = \frac{1}{2}m_2 v_B^2 + \mu m_2 g x \cos\varphi$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2xg(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)} \qquad (2)$$

Das Geschwindigkeitsverhältnis erhält man, indem man (1) in (2) einsetzt und mit $\cos\varphi$ kürzt:
$$\frac{v_1}{v_B} = \sqrt{\frac{\tan\varphi + \mu}{\tan\varphi - \mu}}$$

d) Es handelt sich hierbei um einen völlig inelastischen Stoß:
Nach dem Impulserhaltungssatz folgt:
$$m_1 \underbrace{u_1}_{=0} + m_2 \underbrace{u_2}_{=v_B} = (m_1 + m_2)v_{\text{gem}}$$
$$\Rightarrow v_{\text{gem}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_B$$

Lösung zu Aufgabe 9:

Die Dichte hängt nur von der x-Koordinate ab und nimmt von $(0/\rho_0)$ linear zu auf den Wert $(L/5\rho_0)$.

Die Dichtefunktion ist eine lineare Funktion mit der Gleichung:

$\rho(x) = \dfrac{4\rho_0}{L}x + \rho_0$

Die Gesamtmasse m ist folgendermaßen definiert:

$m = \int\limits_V \rho(x,\, y,\, z)\, dV$

Die Schwerpunktskoordinaten sind folgendermaßen definiert:

$$x_S = \frac{\int\limits_V x \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dV}{\int\limits_V \rho(x,\, y,\, z)\, dV},\ y_S = \frac{\int\limits_V y \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dV}{\int\limits_V \rho(x,\, y,\, z)\, dV},\ z_S = \frac{\int\limits_V z \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dV}{\int\limits_V \rho(x,\, y,\, z)\, dV}$$

Auf dieses Problem angewandt:

$A = \text{const.} \Rightarrow dV = A\, dx$

$\rho(x,\, y,\, z) = \rho(x) = \dfrac{4\rho_0}{L}x + \rho_0$

Es folgt für die Gesamtmasse:

$$m = \int\limits_V \rho(x,\, y,\, z)\, dV = \int\limits_{x=0}^{L} \rho(x)\, A dx = A \int\limits_{x=0}^{L} (\frac{4\rho_0}{L}x + \rho_0)\, dx = A\left[\frac{2\rho_0}{L}x^2 + \rho_0 x\right]_{x=0}^{L} = 3A\rho_0 L$$

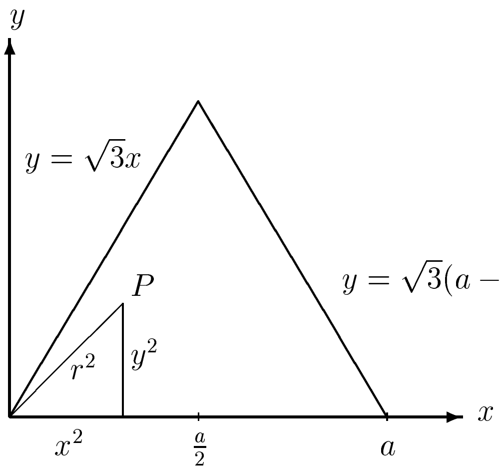
Es gilt des weiteren:

$$\int\limits_V x\rho(x,\, y,\, z)\, dV = \int\limits_{x=0}^{L} x\rho(x)\, A dx = A \int\limits_{x=0}^{L} (\frac{4\rho_0}{L}x^2 + \rho_0 x)\, dx = A\left[\frac{4\rho_0}{3L}x^3 + \frac{\rho_0}{2}x^2\right]_{x=0}^{L} = \frac{11}{6}A\rho_0 L^2$$

Es folgt für die Schwerpunktskoordinate in x-Richtung:

$$x_S = \frac{\int\limits_V x \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dV}{\int\limits_V \rho(x,\, y,\, z)\, dV} = \frac{\frac{11}{6}A\rho_0 L^2}{3A\rho_0 L} = \frac{11}{18}L$$

Lösung zu Aufgabe 10:



Für das Massenträgheitsmoment gilt:
$J = \int\limits_V \rho(x,\, y,\, z) r^2 \, dV$

r ist der Abstand von der Drehachse zum Volumenelement dV

Auf dieses Problem angewendet und mit folgenden Voraussetzungen:

$\rho = \text{const.}$
$r^2 = x^2 + y^2$
$z = \text{const.} \Rightarrow dV = z dA = z dy dx$

Es folgt für das Massenträgheitsmoment:

$$J = \int\limits_V \rho(x,\, y,\, z) r^2 \, dV = \int\limits_A \rho(x^2 + y^2)\, z dA = z\rho \int\limits_A (x^2 + y^2)\, dy dx$$

Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks wird begrenzt durch:

$y = 0$ und $y = \sqrt{3}x$ im Bereich $x = 0$ bis $x = \frac{a}{2}$
$y = 0$ und $y = \sqrt{3}(a - x)$ im Bereich $x = \frac{a}{2}$ bis $x = a$

$$J = z\rho \int\limits_{x=0}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{3}x} (x^2 + y^2)\, dy dx + z\rho \int\limits_{x=\frac{a}{2}}^{a} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{3}(a-x)} (x^2 + y^2)\, dy dx$$

$$J = z\rho \int\limits_{x=0}^{\frac{a}{2}} \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3\right]_{y=0}^{\sqrt{3}x} dx + z\rho \int\limits_{x=\frac{a}{2}}^{a} \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3\right]_{y=0}^{\sqrt{3}(a-x)} dx$$

$$J = z\rho \int\limits_{x=0}^{\frac{a}{2}} (\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3}x^3)\, dx + z\rho \int\limits_{x=\frac{a}{2}}^{a} (\sqrt{3}x^2(a - x) + \sqrt{3}(a - x)^3)\, dx$$

$$J = 2\sqrt{3}z\rho \int\limits_{x=0}^{\frac{a}{2}} (x^3)\, dx + \sqrt{3}z\rho \int\limits_{x=\frac{a}{2}}^{a} (ax^2 - x^3 + (a - x)^3)\, dx$$

$$J = 2\sqrt{3}z\rho \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^{\frac{a}{2}} + \sqrt{3}z\rho \left[\tfrac{1}{3}ax^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}(a - x)^4\right]_{x=\frac{a}{2}}^{a}$$

$$J = 2\sqrt{3}z\rho(\tfrac{1}{4}(\tfrac{a^4}{16} - 0)) + \sqrt{3}z\rho(\tfrac{1}{3}a(a^3 - \tfrac{a^3}{8}) - \tfrac{1}{4}(a^4 - \tfrac{a^4}{16}) - \tfrac{1}{4}(0 - \tfrac{a^4}{16}))$$

$$J = \tfrac{5}{48}\sqrt{3}a^4 z\rho$$

Es gilt: $\rho = \dfrac{m}{V}$ mit $V = z\dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{4m}{za^2\sqrt{3}}$$

Dies eingesetzt ergibt:

$$J = \tfrac{5}{12}ma^2$$

Lösung zu Aufgabe 11:

Für das Massenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse mit konstanter Dichte ρ gilt:

$$J = \int_V \rho(x,\, y,\, z) \cdot (x^2 + y^2)\, dzdydx = \int_V \rho \cdot (x^2 + y^2)\, dzdydx = \rho \int_V (x^2 + y^2)\, dzdydx$$

Die Integrationsbereiche sind:

$$-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$
$$-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$$
$$-R \leq x \leq R$$

Hieraus folgt aus Symmetriegründen für das Massenträgheitsmoment:

$$J = \rho \int_{x=-R}^{R} \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dzdydx = 8\rho \int_{x=0}^{R} \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dzdydx$$

Folgende Integrale sind aus Büchern bekannt:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \arcsin \tfrac{x}{a}$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\tfrac{1}{4} x \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \tfrac{1}{8} a^2 x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{8} a^4 \arcsin \tfrac{x}{a}$$

Hieraus folgt für J:

$$J = 8\rho \int_{x=0}^{R} \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})\, dydx$$

$$J = \underbrace{8\rho \int_{x=0}^{R} \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})\, dydx}_{=J_1} + \underbrace{8\rho \int_{x=0}^{R} \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} (y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})\, dydx}_{=J_2}$$

$$J_1 = 8\rho \int_{x=0}^{R} \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})\, dydx$$

$$J_1 = 8\rho \int_{x=0}^{R} \left[\tfrac{1}{2} x^2 y \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx + 8\rho \int_{x=0}^{R} \left[\tfrac{1}{2} x^2 (R^2 - x^2) \arcsin \tfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$

$$J_1 = 8\rho \int_{x=0}^{R} (\tfrac{1}{2} x^2 (R^2 - x^2) \tfrac{\pi}{2})\, dx = 2\pi\rho \int_{x=0}^{R} (R^2 x^2 - x^4)\, dx$$

$$J_1 = 2\pi\rho \left[\tfrac{1}{3} R^2 x^3 - \tfrac{1}{5} x^5\right]_{x=0}^{R} = \tfrac{4}{15} \pi R^5 \rho$$

$$J_2 = 8\rho \int_{x=0}^{R} \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} (y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})\, dydx$$

$$J_2 = 8\rho \int_{x=0}^{R} \left[-\tfrac{1}{4} y \sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)^3}\right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx + 8\rho \int_{x=0}^{R} \left[\tfrac{1}{8} (R^2 - x^2) y \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$

$$\cdots \quad + 8\rho \int_{x=0}^{R} \left[\tfrac{1}{8} (R^2 - x^2)^2 \arcsin \tfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$

$$J_2 = 8\rho \int_{x=0}^{R} (\tfrac{1}{8} (R^2 - x^2)^2 \tfrac{\pi}{2})\, dx = \tfrac{\pi}{2} \rho \int_{x=0}^{R} (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4)\, dx$$

$$J_2 = \tfrac{\pi}{2} \rho \left[R^4 x - \tfrac{2}{3} R^2 x^3 + \tfrac{1}{5} x^5\right]_{x=0}^{R} = \tfrac{4}{15} \pi R^5 \rho$$

Mit $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3}{4\pi R^3} m$ und $J = J_1 + J_2$ folgt:

$$J = \tfrac{4}{15} \pi R^5 \rho + \tfrac{4}{15} \pi R^5 \rho = \tfrac{8}{15} \pi R^5 \rho = \tfrac{8}{15} \pi R^5 \tfrac{3}{4\pi R^3} m = \tfrac{2}{5} m R^2$$

Lösung zu Aufgabe 12:

Für das Massenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse mit konstanter Dichte ρ gilt:
$J = \int\limits_V \rho(x,\, y,\, z) \cdot (x^2 + y^2)\, dzdydx = \int\limits_V \rho \cdot (x^2 + y^2)\, dzdydx = \rho \int\limits_V (x^2 + y^2)\, dzdydx$

Einführung von Kugelkoordinaten:
$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$
$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$
$z = r \cos\vartheta$
$dV = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi dr$
$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi = r^2 \sin^2\vartheta \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} = r^2 \sin^2\vartheta$

Die neuen Grenzen der Variablen sind:
$0 \leq \vartheta \leq \pi$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq r \leq R$

Ersetzt man dies im obigen Integral und mit den neuen Grenzen, folgt:
$J = \rho \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} (r^2 \sin^2\vartheta)\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi dr = \rho \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} (r^4 \sin^3\vartheta)\, d\vartheta d\varphi dr$

Folgendes Integral ist aus Büchern bekannt:
$\int \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{3}\cos^3\vartheta - \cos\vartheta$

Der Integrand ist entkoppelt in den Variablen, deshalb folgt:
$J = \rho \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} (r^4 \sin^3\vartheta)\, d\vartheta d\varphi dr = \rho \int\limits_{r=0}^{R} (r^4)\, dr \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} (\sin^3\vartheta)\, d\vartheta$

$J = \rho \left[\frac{1}{5}r^5\right]_{r=0}^{R} \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{3}\cos^3\vartheta - \cos\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\pi}$

$J = \rho\frac{1}{5}R^5 \cdot 2\pi \cdot (-\frac{1}{3} + 1 - (\frac{1}{3} - 1))$

$J = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho$

Mit $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3}{4\pi R^3}m$ folgt:

$J = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho = \frac{8}{15}\pi R^5 \frac{3}{4\pi R^3} m = \frac{2}{5} m R^2$

Lösung zu Aufgabe 13:

Legt man den Mittelpunkt der Kugel in den Ursprung und betrachtet die obere Hälfte der Kugel, dann ist aus Symmetriegründen $x_S = y_S = 0$.

Die Gesamtmasse der Halbkugel ist m und somit gilt:
$\rho = \frac{3}{2\pi R^3} m$.

Für die z-Koordinate des Schwerpunkts gilt:

$$z_S = \frac{\int\limits_V z \cdot \rho(x,\, y,\, z)\, dV}{m} = \frac{\rho \int\limits_V z\, dV}{m} = \frac{3}{2\pi R^3} \int\limits_V z\, dV$$

Einführung von Kugelkoordinaten:
$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$
$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$
$z = r \cos\vartheta$
$dV = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi dr$

Die neuen Grenzen der Variablen sind:
$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq r \leq R$

Ersetzt man dies im obigen Integral und mit den neuen Grenzen, folgt:

$$z_S = \frac{3}{2\pi R^3} \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} (r \cos\vartheta)\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi dr = \frac{3}{2\pi R^3} \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} (r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta)\, d\vartheta d\varphi dr$$

Folgendes Integral ist aus Büchern bekannt:
$\int \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2} \sin^2\vartheta$

Der Integrand ist entkoppelt in den Variablen, deshalb folgt:

$$z_S = \frac{3}{2\pi R^3} \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} (r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta)\, d\vartheta d\varphi dr = \frac{3}{2\pi R^3} \int\limits_{r=0}^{R} (r^3)\, dr \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta \sin\vartheta)\, d\vartheta$$

$$z_S = \frac{3}{2\pi R^3} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{R} \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$z_S = \frac{3}{2\pi R^3} \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$z_S = \frac{3}{8} R$$

Lösung zu Aufgabe 14:

Für das Massenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse mit konstanter Dichte ρ gilt:
$J = \int\limits_V \rho(x,\, y,\, z) \cdot (x^2 + y^2)\, dzdydx = \int\limits_V \rho \cdot (x^2 + y^2)\, dzdydx = \rho \int\limits_V (x^2 + y^2)\, dzdydx$

Einführung von Zylinderkoordinaten:
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$
$dV = r\, drd\varphi dz$
$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$

Mit den Grenzen des Kreiskegels von:
$0 \le r \le \frac{R}{H}z$
$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le z \le H$

Ersetzt man dies im obigen Integral und mit den neuen Grenzen, folgt:

$$J = \rho \int\limits_{z=0}^{H} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\frac{R}{H}z} (r^2)\, rdrd\varphi dz = \rho \int\limits_{z=0}^{H} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\frac{R}{H}z} (r^3)\, drd\varphi dz$$

$$J = \rho \int\limits_{z=0}^{H} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{\frac{R}{H}z} d\varphi dz = \frac{1}{4}\frac{R^4}{H^4}\rho \int\limits_{z=0}^{H} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (z^4)\, d\varphi dz$$

Der Integrand ist nun entkoppelt in den Variablen, deshalb folgt:

$$J = \frac{1}{4}\frac{R^4}{H^4}\rho \int\limits_{z=0}^{H} (z^4)\, dz \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi$$

$$J = \frac{1}{4}\frac{R^4}{H^4}\rho \left[\tfrac{1}{5}z^5\right]_{z=0}^{H} \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi}$$

$$J = \frac{1}{4}\frac{R^4}{H^4}\rho \cdot \frac{1}{5}H^5 \cdot 2\pi$$

$$J = \frac{1}{10}\pi R^4 H\rho$$

Das Volumen eines senkrechten Kreiskegels ist:
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Und somit folgt für die Dichte ρ mit der Masse m:

$$\rho = \frac{3}{\pi R^2 H} m$$

$$J = \frac{1}{10}\pi R^4 H\rho = \frac{1}{10}\pi R^4 H \frac{3}{\pi R^2 H} m$$

$$J = \frac{3}{10} m R^2$$

Lösung zu Aufgabe 15:

Man benützt Kugelkoordinaten:
$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$
$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$
$z = r \cos\vartheta$
$dV = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi dr$

Der Abstand zum Mittelpunkt ist:
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$

Somit gilt für die lineare Dichtezunahme:
$\rho(r) = \frac{\rho_0}{R} r$

Für die Masse der Kugel gilt:
$M = \int\limits_V \rho(x,\, y,\, z)\, dV = \int\limits_V \rho(r)\, r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi dr = \int\limits_V \frac{\rho_0}{R} r\, r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi dr = \frac{\rho_0}{R} \int\limits_V r^3 \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi dr$

Die neuen Grenzen der Variablen sind:
$0 \le \vartheta \le \pi$
$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le r \le R$

Damit folgt für die Masse:
$M = \frac{\rho_0}{R} \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} (r^3 \sin\vartheta)\, d\vartheta d\varphi dr$

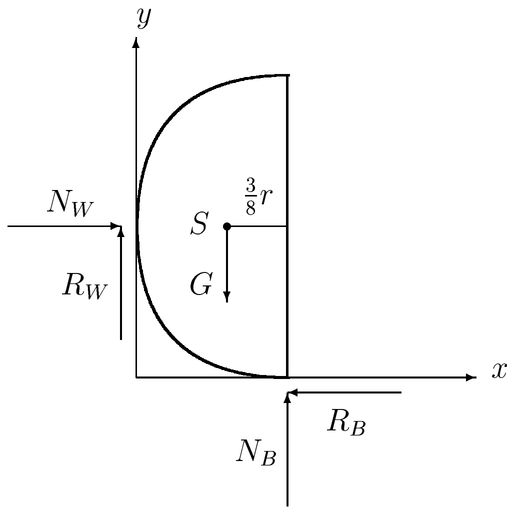
Der Integrand ist nun entkoppelt in den Variablen, deshalb folgt:
$M = \frac{\rho_0}{R} \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} (r^3 \sin\vartheta)\, d\vartheta d\varphi dr = \frac{\rho_0}{R} \int\limits_{r=0}^{R} (r^3)\, dr \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} (\sin\vartheta)\, d\vartheta$

$M = \frac{\rho_0}{R} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{R} \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_{\vartheta=0}^{\pi}$

$M = \frac{\rho_0}{R} \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \cdot 2$

$M = \pi R^3 \rho_0$

Lösung zu Aufgabe 16:



Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung fordert:

$\sum \vec{F}_x = \vec{0}$ (1) $N_W - R_B = 0 \Rightarrow N_W = R_B$

$\sum \vec{F}_y = \vec{0}$ (2) $-G + R_W + N_B = 0$

Momentengleichgewicht um den Schwerpunkt S fordert:

$\sum \vec{M}_S = \vec{0}$ (3) $N_B \frac{3}{8} r - R_B r - R_W \frac{5}{8} r = 0 \quad | \cdot \frac{8}{r}$

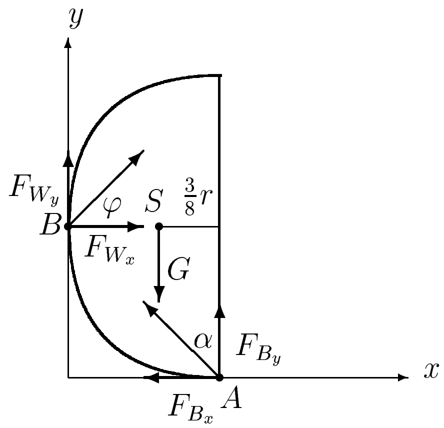
Für die Reibungskräfte gilt:

$R_B = \mu N_B$
$R_W = \mu N_W = \mu^2 N_B$

Dies eingesetzt in (3):
$3N_B - 8\mu N_B - 5\mu^2 N_B = 0$
$-N_B(5\mu^2 + 8\mu - 3) = 0$

Dies kann nur erfüllt sein, wenn gilt:
$5\mu^2 + 8\mu - 3 = 0$

$\mu_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+60}}{10}$
$\mu_1 = 0,31 \qquad \mu_2 < 0$



Momentengleichgewicht um den Berührpunktpunkt A am Boden fordert:

$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \qquad G\frac{3}{8}r - F_{W_x}r - F_{W_y}r = 0 \quad | \cdot \frac{1}{r}$

Für die Wandkräfte gilt:

$F_{W_y} = \mu F_{W_x} \qquad F_{W_x} = F_W \cos\varphi$

$\tan\varphi = \frac{F_{W_y}}{F_{W_x}} = \mu \qquad F_{W_y} = F_W \sin\varphi$

Dies in obige Gleichung eingesetzt liefert:

$\frac{3}{8}G - F_W\cos\varphi - F_W\sin\varphi = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$

$\frac{3}{8}G\frac{1}{\cos\varphi} = F_W(1 + \tan\varphi)$ mit $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$ und $\tan\varphi = \mu$ folgt:

$\frac{3}{8}G\sqrt{1+\tan^2\varphi} = F_W(1+\tan\varphi)$

$F_W = \frac{3G}{8(1+\mu)}\sqrt{1+\mu^2}$

Für $\mu = 0,31$ folgt: $\varphi = 17,2°$ und $F_W = 0,299\,G$

Momentengleichgewicht um den Berührpunktpunkt B an der Wand fordert:

$\sum \vec{M}_B = \vec{0} \qquad G\frac{5}{8}r + F_{B_x}r - F_{B_y}r = 0 \quad | \cdot \frac{1}{r}$

Für die Wandkräfte gilt:

$F_{B_x} = \mu F_{B_y} \qquad F_{B_x} = F_B\sin\alpha = F_B\sin\varphi$

$\tan\alpha = \frac{F_{B_x}}{F_{B_y}} = \mu \Rightarrow \alpha = \varphi \qquad F_{B_y} = F_B\cos\alpha = F_B\cos\varphi$

Dies in obige Gleichung eingesetzt liefert:

$\frac{5}{8}G + F_B\sin\varphi - F_B\cos\varphi = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$

$\frac{5}{8}G\frac{1}{\cos\varphi} = F_B(1-\tan\varphi)$

$\frac{5}{8}G\sqrt{1+\tan^2\varphi} = F_B(1-\tan\varphi)$

$F_B = \frac{5G}{8(1-\mu)}\sqrt{1+\mu^2}$

Für $\mu = 0,31$ folgt: $\alpha = \varphi = 17,2°$ und $F_B = 0,954\,G$

Da $\alpha = \varphi$, sind F_B und F_W orthogonal:

$F_{\text{ges}} = \sqrt{F_W^2 + F_B^2} = G\sqrt{0,299^2 + 0,954^2} = G$

Für diesen statischen Zustand üben Wand und Boden gemeinsam gerade die Gewichtskraft auf die Halbkugel aus.

Lösung zu Aufgabe 17:

Das Massenträgheitsmoment einer Scheibe mit einer Drehachse senkrecht zum Mittelpunkt ist:
$J_S = \frac{1}{2}MR^2$

Die Relativgeschwindigkeit des Kindes bezüglich der Scheibe ist:
$v_{\text{rel}} = v_m - v_M$

v_m ist die Geschwindigkeit des Kindes zur ruhenden Umgebung
v_M ist die Bahngeschwindigkeit am Rand der Scheibe, also $v_M = \omega R$

Hieraus folgt für die Geschwindigkeit des Kindes zur ruhenden Umgebung
$v_m = v_{\text{rel}} + \omega R$

Der Drehimpuls vor der Bewegung ist::
$L_{\text{vor}} = 0$, da Scheibe und Kind ruhen.

Der Drehimpuls nachher ist:
$L_{\text{nach}} = m v_m R + J_S \omega$

Die Drehimpulserhaltung fordert:
$L_{\text{vor}} = L_{\text{nach}}$

$$0 = m v_m R + J_S \omega$$
$$0 = m(v_{\text{rel}} + \omega R) + J_S \omega$$
$$0 = m v_{\text{rel}} R + m\omega R^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega \qquad | \cdot \frac{1}{R}$$
$$0 = m v_{\text{rel}} + (m + \frac{1}{2}M)R\omega$$
$$\omega = -\frac{m}{m + \frac{1}{2}M} \cdot \frac{v_{\text{rel}}}{R} = -\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}} \cdot \frac{v_{\text{rel}}}{R}$$

Definieren wir das dimensionslose Massenverhältnis zwischen Scheibe und Kind zu $\mu = \frac{M}{m}$, so folgt:
$\omega = -\frac{1}{1+\frac{1}{2}\mu} \cdot \frac{v_{\text{rel}}}{R}$

Die in der Scheibe enthaltene Rotationsenergie ist:
$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J_S\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2 \cdot \left(-\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}} \cdot \frac{v_{\text{rel}}}{R}\right)^2$$
$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}}\right)^2 M v_{\text{rel}}^2$$
$$E_{\text{rot}} = \left(\frac{1}{2 + \frac{M}{m}}\right)^2 M v_{\text{rel}}^2$$

Mit dem Massenverhältnis μ folgt:
$E_{\text{rot}} = \left(\frac{1}{2+\mu}\right)^2 M v_{\text{rel}}^2$

Lösung zu Aufgabe 18:

Für das Massenträgheitsmoment des Zylinders bezüglich der x-Achse mit konstanter Dichte ρ gilt:

$J = \int\limits_V \rho(x,\, y,\, z) \cdot (y^2 + z^2)\, dzdydx = \int\limits_V \rho \cdot (y^2 + z^2)\, dzdydx = \rho \int\limits_V (y^2 + z^2)\, dzdydx$

Einführung von Zylinderkoordinaten:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

$dV = r\, drd\varphi dz$

Mit den Grenzen des Zylinders von:

$0 \leq r \leq R$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$-\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2}$

Ersetzt man dies im obigen Integral und mit den neuen Grenzen, folgt:

$J = \rho \int\limits_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} (r^2\sin^2\varphi + z^2)\, rdrd\varphi dz = \rho \int\limits_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} (r^3\sin^2\varphi + rz^2)\, drd\varphi dz$

$J = \rho \int\limits_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\sin^2\varphi + \frac{1}{2}r^2z^2\right]_{r=0}^{R} d\varphi dz = \rho \int\limits_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (\frac{1}{4}R^4\sin^2\varphi + \frac{1}{2}R^2z^2)\, d\varphi dz$

Aus Büchern ist folgendes Integral bekannt:

$\int \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi$

$J = \rho \int\limits_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[\frac{1}{4}R^4(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi) + \frac{1}{2}R^2z^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} dz = \rho \int\limits_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} (\frac{1}{4}R^4\pi + R^2z^2\pi)\, dz$

$J = \pi R^2\rho \int\limits_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} (\frac{1}{4}R^2 + z^2)\, dz = \pi R^2\rho \left[\frac{1}{4}R^2z + \frac{1}{3}z^3\right]_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \pi R^2\rho(\frac{1}{4}R^2H + \frac{1}{12}H^3)$

$J = \frac{1}{12}\pi R^2H\rho(3R^2 + H^2)$

Das Volumen eines Zylinders ist:

$V = \pi R^2 H$

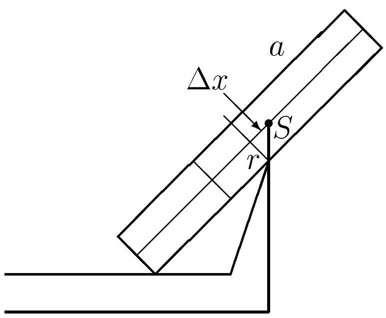
Und somit folgt für die Dichte ρ mit der Masse m:

$$\rho = \frac{1}{\pi R^2 H}m$$

$$J = \frac{m}{12}(3R^2 + H^2)$$

Lösung zu Aufgabe 19:

Zuerst berechnet man die Koordinaten des Schwerpunktes der Zigarette samt Asche. Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse der Zigarette (Zylinder) im Abstand s vom Auflagepunkt im Aschenbecherboden.



Für die Masse der Asche gilt:
$m_A = k\rho\pi r^2 x$

Für die Masse des Tabaks gilt:
$m_T = \rho\pi r^2(L-x)$

Die Gesamtmasse der Zigarette ist:
$M = m_A + m_T = \rho\pi r^2((k-1)x + L)$

Für den Gesamtschwerpunkt gilt:

$$s = \frac{m_A\frac{1}{2}x + m_T\frac{1}{2}(x+L)}{M} = \frac{m_A x + m_T(x+L)}{2M} = \frac{k\rho\pi r^2 xx + \rho\pi r^2(L-x)(x+L)}{2\rho\pi r^2((k-1)x+L)}$$

$$s = \frac{(k-1)x^2 + L^2}{2((k-1)x+L)}$$

Der Schwerpunkt muß lotrecht über dem Drehpunkt liegen, also lautet die Kippbedingung:
$s = L - a + \Delta x$ mit $\Delta x = r\tan\alpha$

$$\frac{(k-1)x^2 + L^2}{2((k-1)x+L)} = L - a + r\tan\alpha$$

$$(k-1)x^2 + L^2 = 2((k-1)x+L)(L-a+r\tan\alpha) \quad | \cdot \frac{1}{k-1}$$

$$x^2 - 2(L-a+r\tan\alpha)x + \frac{L^2 - 2(L-a+r\tan\alpha)L}{k-1} = 0$$

Einsetzen der gegebenen Werte liefert die quadratische Gleichung:
$x^2 - 8,54x + 15,4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{8,54 \pm 3,36}{2}$

$x_1 = 2,59\,\mathrm{cm}$
$(x_2 = 5,95\,\mathrm{cm})$

x_2 entfällt, da die Aschenlänge kleiner sein sollte als $x < L - a + r\tan\alpha = 4,27\,\mathrm{cm}$

Die Zeit erhält man über das Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung:

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{u}$$

$$t_{\mathrm{kipp}} = \frac{x_1}{u} = 5,18\,\mathrm{min}$$

Lösung zu Aufgabe 20:

a) Für ein physikalisches Pendel mit kleinen Auslenkungen gilt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgx}}$$

Mit dem Satz von Steiner erfolgt für das Massenträgheitsmoment bezüglich der Achse durch A:
$J_A = J_S + mx^2 = m(\frac{1}{6}a^2 + x^2)$

Somit folgt für die Schwingungsdauer:

$$T(x) = 2\pi\sqrt{\frac{m(\frac{1}{6}a^2 + x^2)}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{6}a^2 + x^2}{gx}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{a^2}{6x} + x}$$

Führen wir den Radikand der Wurzel als $R(x) = \dfrac{a^2}{6x} + x$ ein, so können wir folgende mathematische Aussage machen:
Die Wurzel einer Funktion wird minimal, wenn der Radikand minimal wird.
Somit wird $T(x)$ minimal, wenn $R(X)$ minimal wird.
Berechnung des Minimums von $R(X)$:

$$R(x) = \frac{a^2}{6x} + x \qquad \text{für } x > 0$$

$$R'(x) = -\frac{a^2}{6x^2} + 1$$

$$R''(x) = \frac{a^2}{3x^3} > 0 \qquad \text{für alle } x > 0 \text{ (hinreichende Bedingung für Minimum erfüllt)}$$

Die notwendige Bedingung für ein Minimum ist $R'(x) = 0$:

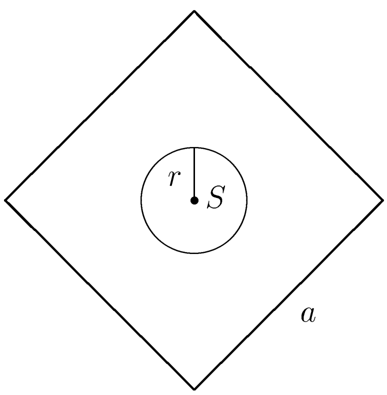
$$-\frac{a^2}{6x^2} + 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{a}{\sqrt{6}} \qquad (x_2 = -\frac{a}{\sqrt{6}})$$

b) Die minimale Schwingungsdauer ist:

$$T_{\min} = T(x_1) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{6}a^2 + x_1^2}{gx_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{6}a^2}{g\frac{a}{\sqrt{6}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{ga}} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g\sqrt{6}}}$$

c) Alle weiteren Achsen, bei denen die Schwingungsdauer minimal ist, liegen auf einem Kreis um S mit dem Radius $r = x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$



Lösung zu Aufgabe 21:

Die Achsen sowie die Scheibe sind Zylinder. Die beschleunigte Bewegung des Gesamtkörpers läßt sich zerlegen in eine **Translation des Gesamtschwerpunkts** mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S und eine **Rotation um die Symmetrieachse** der Zylinder mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

Die Abrollbedingung fordert:
$v_S = \omega r_2$ oder $\omega = \frac{v_s}{r_2}$

Die Masse und das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich der Symmetrieachse ist:
$m_1 = \rho\pi r_1^2 d$
$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 = \frac{1}{2}\rho\pi r_1^4 d$

Die Masse und das Trägheitsmoment einer Achse bezüglich der Symmetrieachse gleichen Materials ist:
$m_2 = \rho\pi r_2^2 l$
$J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 = \frac{1}{2}\rho\pi r_2^4 l$

Hieraus folgt für die Gesamtmasse und das Gesamtträgheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse:
$m = m_1 + 2m_2 = \rho\pi(r_1^2 d + 2r_2^2 l)$
$J = J_1 + 2J_2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \rho\pi(\frac{1}{2} r_1^4 d + r_2^4 l)$

Der Energieerhaltungssatz lautet mit der Gesamtenergie $E_{\text{ges}} = mg\Delta h$:
$mg\Delta h = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$

$mg\Delta h = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J(\frac{v_S}{r_2})^2$

$mg\Delta h = \frac{1}{2} v_S^2 (m + \frac{J}{r_2^2})$

$$v_S^2 = \frac{2mg\Delta h}{m + \frac{J}{r_2^2}} = 2g\Delta h \frac{m r_2^2}{m r_2^2 + J}$$

$$v_S^2 = 2g\Delta h \frac{(r_1^2 d + 2r_2^2 l) r_2^2}{(r_1^2 d + 2r_2^2 l) r_2^2 + \frac{1}{2} r_1^4 d + r_2^4 l} = 2g\Delta h \frac{\frac{d}{l}(\frac{r_1}{r_2})^2 + 2}{\frac{d}{l}(\frac{r_1}{r_2})^2 (1 + \frac{1}{2}(\frac{r_1}{r_2})^2) + 3}$$

$$v_S = \sqrt{2g\Delta h} \sqrt{\frac{\frac{d}{l}(\frac{r_1}{r_2})^2 + 2}{\frac{d}{l}(\frac{r_1}{r_2})^2 (1 + \frac{1}{2}(\frac{r_1}{r_2})^2) + 3}} = 0,68\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Im freien Fall, also mit $\omega = 0$ und v_{frei} folgt für den Energieerhaltungssatz:
$mg\Delta h = \frac{1}{2} m v_{\text{frei}}^2$
$v_{\text{frei}}^2 = 2g\Delta h \Rightarrow v_{\text{frei}} = \sqrt{2g\Delta h} \Rightarrow v_{\text{frei}} = 4,47\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Der Bruchteil der Gesamtenergie, der für die Rotation benötigt wird:

$$\frac{E_{\text{rot}}}{E_{\text{ges}}} = \frac{\frac{1}{2} J\omega^2}{mg\Delta h} = \frac{mg\Delta h - \frac{1}{2} m v_S^2}{mg\Delta h} = 1 - \frac{m v_S^2}{2mg\Delta h} = 1 - \frac{v_S^2}{2g\Delta h} = 1 - \frac{v_S^2}{v_{\text{frei}}^2}$$

$$\frac{E_{\text{rot}}}{E_{\text{ges}}} = 1 - (\frac{v_S}{v_{\text{frei}}})^2 = 97,7\,\%$$

Lösung zu Aufgabe 22:

Die Masse des Eimers samt Inhalt $m_{\text{ges}}(t)$ ändert sich linear mit der Zeit, da pro Zeiteinheit eine konstante Menge Wasser ausfließt. Es gilt also:
$m_{\text{ges}}(t) = at + b$

Es sind die Koeffizienten a und b zu bestimmen:
$m_{\text{ges}}(0) = M + m_0$
$\Rightarrow b = M + m_0$
$m_{\text{ges}}(T) = M$
$\Rightarrow aT + b = M \Leftrightarrow aT + M + m_0 = M \Rightarrow a = -\frac{m_0}{T}$

Die zeitabhängige Eimergesamtmasse ist also:
$m_{\text{ges}}(t) = -\frac{m_0}{T} \cdot t + M + m_0$

Die zeitabhängige beschleunigende Kraft $F_b(t)$ ist die Differenz aus der konstanten (zeitunabhängigen) Zugkraft F und der zeitabhängigen Gewichtskraft des Eimers $F_G(t) = m_{\text{ges}}(t) \cdot g$.
$F_b(t) = F - F_G(t) = F - m_{\text{ges}}(t) \cdot g$

Die Zugkraft F soll so gewählt werden, daß die Beschleunigung zu Beginn $a(0) = 0$ beträgt
$a(0) = 0 \Rightarrow F_b(0) = 0 \Rightarrow 0 = F - F_G(0)$
$\Rightarrow F = F_G(0) = (M + m_0)g$

Hiermit folgt für die beschleunigende Kraft $F_b(t)$
$F_b(t) = (M + m_0)g - (-\frac{m_0}{T} \cdot t + M + m_0)g = \frac{m_0 g}{T} \cdot t$

Mit Hilfe von Newton folgt für die Beschleunigung

$$a(t) = \frac{F_b(t)}{m_{\text{ges}}(t)} = \frac{F - m_{\text{ges}}(t)g}{m_{\text{ges}}(t)} = \frac{F}{m_{\text{ges}}(t)} - g$$

$$a(t) = \frac{(M + m_0)g}{-\frac{m_0}{T} \cdot t + M + m_0} - g = \left(\frac{1}{-\frac{m_0}{M+m_0} \cdot \frac{t}{T} + 1} - 1 \right) g$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung hängen wie folgt zusammen
$dv = a(t)\, dt$

$$\int_{v=0}^{v_E} dv = g \int_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{-\frac{m_0}{M+m_0} \cdot \frac{t}{T} + 1} - 1 \right) dt$$

$$[v]_{v=0}^{v_E} = g \left[-\frac{(M + m_0)T}{m_0} \ln \left(-\frac{m_0}{M + m_0} \cdot \frac{t}{T} + 1 \right) - t \right]_{t=0}^{T}$$

$$v_E = g \left(-\frac{(M + m_0)T}{m_0} \ln \frac{M}{M + m_0} - T \right) = gT \left(-\frac{M + m_0}{m_0} \ln \frac{M}{M + m_0} - 1 \right)$$

$$v_E = \left(\frac{M + m_0}{m_0} \ln \frac{M + m_0}{M} - 1 \right) gT$$

Lösung zu Aufgabe 23:

Das Anbringen der Masse in der Mitte teilt die Feder mit der Ruhelänge l_0 und der Federkonstanten C in zwei gleiche, parallel geschaltete Federn mit den Ruhelängen $l_i = \frac{l_0}{2}$ und somit den Federkonstanten $C_i = 2C$.

Die neue sich ergebende Federkonstante ist somit
$C^* = 2C_i = 4C$

Die Kreisfrequenz dieser freien Schwingung ist damit
$\omega_0 = \sqrt{\frac{C^*}{m}} = 2\sqrt{\frac{C}{m}}$

Da die Masse im Umkehrpunkt aus der Ruhe heraus losgelassen wird, lautet ihre Bewegungsgleichung
$x(t) = a\cos(\omega_0 t)$

$x(t)$ beschreibt die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage und **nicht** den zurückgelegten Weg

Sie soll die Zeit t_1 für den ersten Zentimeter benötigen, das liefert
$x(t_0 = 0) - x(t_1) = 1\,\mathrm{cm}$

Diese Werte eingesetzt
$x(t_0 = 0) = a$
$x(t_1) = a\cos(\omega_0 t_1)$

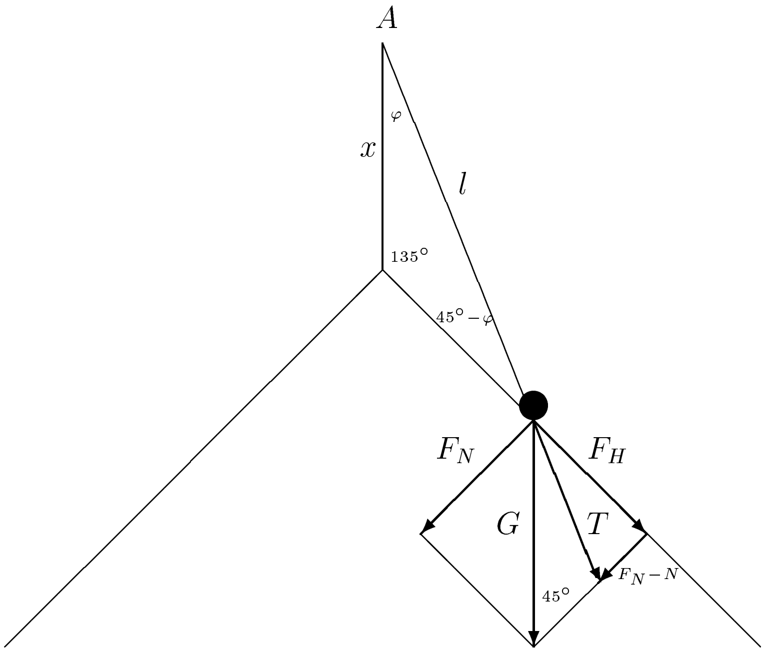
$x(t_0 = 0) - x(t_1) = a - a\cos(\omega_0 t_1) = a(1 - \cos(\omega_0 t_1))$

$3\,\mathrm{cm}(1 - \cos(\omega_0 t_1)) = 1\,\mathrm{cm}$

$\cos(\omega_0 \mathrm{t}_1) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{t}_1 = \frac{\arccos\frac{2}{3}}{\omega_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{C}}}\arccos\frac{2}{3} = 0{,}084\,\mathrm{s}$

Lösung zu Aufgabe 24:



a) Der Sinussatz liefert

$$\frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{x} = \frac{\sin 135^\circ}{l} \text{ mit } \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(45^\circ - \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x}{l}$$

Somit folgt

$$\cos(45^\circ - \varphi) = \sqrt{1 - \sin^2(45^\circ - \varphi)} = \sqrt{\frac{2l^2 - x^2}{2l^2}}$$

Die Kräftezerlegung an der schiefen Ebene des Kegelmantels liefert

$F_H = G \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} mg$

$F_N = G \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} mg$

Ferner gilt

$$\cos(45^\circ - \varphi) = \frac{F_H}{T}$$

$$\Rightarrow T = \frac{F_H}{\cos(45^\circ - \varphi)} = \frac{mgl}{\sqrt{2l^2 - x^2}}$$

Weiter gilt

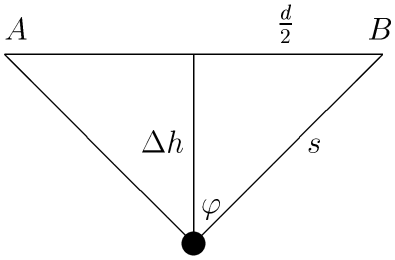
$$\sin(45^\circ - \varphi) = \frac{F_N - N}{T}$$

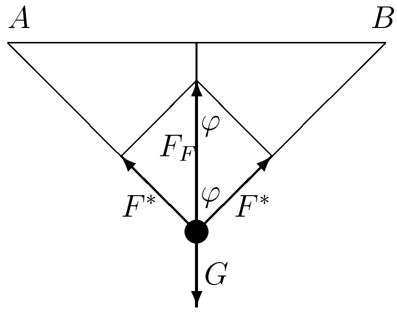
$$\Rightarrow N = F_N - T\sin(45^\circ - \varphi) = \frac{mg(\sqrt{2l^2 - x^2} - x)}{\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - x^2}}$$

b) Es wird die Masse m um die Höhe $\Delta h = l \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} l$ gehoben. Deshalb gilt für die verrichtete Arbeit

$W = mg\Delta h = \frac{\sqrt{2}}{2} mgl$

Lösung zu Aufgabe 25:





a) Mit dem Energieerhaltungssatz folgt
$mg\Delta h + \frac{1}{2}C(d-l_0)^2 = \frac{1}{2}C(2s-l_0)^2$

Es folgt mit Hilfe des Pythagoras
$s = \sqrt{(\Delta h)^2 + (\frac{d}{2})^2} = 1,7\,\mathrm{m}$

Nach C aufgelöst ergibt sich

$$C = \frac{2mg\Delta h}{(2s-l_0)^2 - (d-l_0)^2} = 16\tfrac{2}{3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

b) Es gilt
$\cos\varphi = \frac{\Delta h}{s}$

Der Sinussatz liefert

$\frac{\sin\varphi}{F^*} = \frac{\sin(180° - 2\varphi)}{F_F}$ mit $\sin(180° - 2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$ folgt für die Federkraft F_F

$F_F = 2F^*\cos\varphi$ mit $F^* = C(2s - l_0)$

$\Rightarrow F_F = 2C(2s-l_0)\frac{\Delta h}{s}$

Die Kraft F auf die Masse m im unteren Umkehrpunkt, ist die Differenz der Federkraft F_F mit der Gewichtskraft G
$F = F_F - G$
Die Federkraft
$F_F = 2C(2s-l_0)\frac{\Delta h}{s}$
Die Gewichtskraft
$G = mg$ mit $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Die Gesamtkraft
$F = 2C(2s-l_0)\frac{\Delta h}{s} - mg = 11,96\,\mathrm{N}$

Die Rückstellkraft der Feder F_F überwiegt der Gewichtskraft G, dadurch wirkt die Gesamtkraft F senkrecht nach oben und beschleunigt die Masse m vom unteren Umkehrpunkt wieder nach oben.

Lösung zu Aufgabe 26:

Die Masse M_E der Erde als homogene Kugel mit Radius R und der konstanten Dichte ρ
$M_E = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$

Der Stein habe die Masse m und es gilt für die auf ihn wirkende Kraft
$F(R) = f\frac{M_E m}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho f m R$

Man sieht $F(R) \sim R$ (lineares Kraftgesetz mit $C = \frac{4}{3}\pi\rho f m$)
Das bedeutet es gibt harmonische Schwingungen mit der Schwingungsdauer $T^2 = 4\pi^2\frac{m}{C}$

Für dieses Problem folgt
$T^2 = \dfrac{3\pi}{\rho f}$

Für einen erdnahen Satelliten der Masse m_S muß gelten
$F_Z = F_G$
Es gilt für die erforderliche Zentripetalkraft F_Z
$F_Z = m_S\frac{v^2}{R}$ mit $v = \frac{2\pi R}{T}$
$F_Z = m_S\frac{4\pi^2}{T^2}R$
Für die Gravitationskraft F_G gilt
$F_G = f\frac{M_E m_S}{R^2} = m_S\frac{4}{3}\pi\rho f R$

Somit gilt für die Umlaufdauer
$m_S\frac{4\pi^2}{T^2}R = m_S\frac{4}{3}\pi\rho f R$

$T^2 = \dfrac{3\pi}{\rho f}$

Somit ist diese Umlaufdauer gleich groß wie die Schwingungsdauer.
Ersetzt man die Gravitationskraft durch die Gewichtskraft, so folgt
$F_Z = F_G$

Es gilt für die erforderliche Zentripetalkraft F_Z
$F_Z = m_S\frac{v^2}{R}$ mit $v = \frac{2\pi R}{T}$
$F_Z = m_S\frac{4\pi^2}{T^2}R$

Für die Gewichtskraft F_G gilt
$F_G = m_S g$

Somit gilt für die Umlaufdauer
$m_S\frac{4\pi^2}{T^2}R = m_S g$

$T^2 = 4\pi^2\dfrac{R}{g}$

Gewichtskraft gleich Gravitationskraft liefert
$m_S g = m_S\frac{4}{3}\pi\rho f R$
$g = \frac{4}{3}\pi\rho f R$

Ersetzt man dies in obiger Formel, so sieht man Gleichheit.

Lösung zu Aufgabe 27:

Bezeichnen wir im folgenden r_S den Abstand vom Erdmittelpunkt, bei dem Schwerelosigkeit herrscht.
Da die Erde und der Mond als Kugeln angenommen werden können wir deren Masse im jeweiligen Mittelpunkt konzentriert annehmen.

Mondradius: $R_M = \frac{R_E}{4}$
Mondmasse: $M_M = \frac{M_E}{81}$

Für den Körper der Masse m ist Kräftegleichgewicht, wenn sich die Gravitationskräfte von Erde und Mond kompensieren.
$F_E = F_M$

$$f\frac{M_E m}{r_S^2} = f\frac{M_M m}{(d-r_S)^2} \Rightarrow r_S = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_M}{M_E}}+1} = \frac{9}{10}d$$

Wird der Körper der Masse m von der Erdoberfläche auf die Höhe r_S gehoben, dann wirkt die Mondgravitation F_M beschleunigend und die Erdanziehung verzögernd. Die Geschwindigkeit des Körpers in der Entfernung r_S soll gerade Null sein, dann schafft er es bis auf den Mond.
Die Arbeit, die hierzu notwendig ist $dW = -(F_M - F_E)\,dr$

$$F_M - F_E = f\frac{M_M m}{(d-r)^2} - f\frac{M_E m}{r^2} = fm\left(\frac{M_E}{81(d-r)^2} - \frac{M_E}{r^2}\right) = fmM_E\left(\frac{1}{81(d-r)^2} - \frac{1}{r^2}\right)$$

$$W = -fmM_E\int\limits_{r=R_E}^{r_S}\left(\frac{1}{81(d-r)^2} - \frac{1}{r^2}\right)dr = -fmM_E\left[\frac{1}{81(d-r)} + \frac{1}{r}\right]_{r=R_E}^{r_S}$$

$$W = -fmM_E\left(\frac{1}{81(d-r_S)} + \frac{1}{r_S} - \frac{1}{81(d-R_E)} - \frac{1}{R_E}\right)$$

Diese Arbeit wird von der kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv_0^2$ des Körpers an der Erdoberfläche aufgebracht
Es gilt nach dem Energieerhaltungssatz: $W = \frac{1}{2}mv_0^2$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{-2fM_E\left(\frac{1}{81(d-r_S)} + \frac{1}{r_S} - \frac{1}{81(d-R_E)} - \frac{1}{R_E}\right)} = 11,08\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Nun fällt der Körper auf den Mond mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$
Die Arbeit $dW = (F_M - F_E)\,dr$ wird frei und in reine kinetische Energie $\frac{1}{2}mv_1^2$ umgewandelt

$$W = fmM_E\int\limits_{r=r_S}^{d-R_M}\left(\frac{1}{81(d-r)^2} - \frac{1}{r^2}\right)dr = fmM_E\left[\frac{1}{81(d-r)} + \frac{1}{r}\right]_{r=r_S}^{d-R_M}$$

$$W = fmM_E\left(\frac{1}{81r_M} + \frac{1}{d-R_M} - \frac{1}{81(d-r_S)} - \frac{1}{r_S}\right)$$

Es gilt nach dem Energieerhaltungssatz: $W = \frac{1}{2}mv_1^2$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{2fM_E\left(\frac{1}{81r_M} + \frac{1}{d-R_M} - \frac{1}{81(d-r_S)} - \frac{1}{r_S}\right)} = 2,39\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$