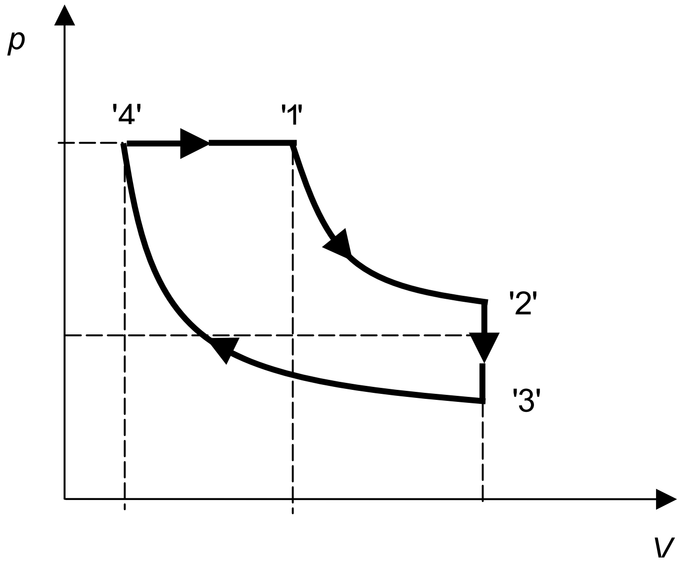
Aufgabe

Eine Wärmekraftmaschine arbeitet nach einem thermodynamischen Kreisprozess, der aus einer Isobaren, einer Isochoren und aus zwei isothermen Zustandsänderungen besteht (vgl. Skizze).



Die Wärmekraftmaschine arbeitet mit der Stoffmenge $n = 10\ \text{mol}$ eines idealen zweiatomigen Gases.

Die Höchstwerte von Druck, Temperatur und Volumen in diesem Kreisprozess sind $p_{\text{max}} = 30\ \text{bar}$, $T_{\text{max}} = 500\ \text{K}$ und $V_{\text{max}} = 72\ \text{l}$.

(a) Welche Volumenänderungsarbeit W verrichtet die Maschine bei der isothermen Expansion?

(b) Der Minimaldruck im Kreisprozess beträgt $p_{\text{min}} = 3{,}84\ \text{bar}$.
Bei welcher der vier Zustandsänderungen des Kreisprozesses nimmt die Innere Energie U des Gases zu? Bestimmen Sie diese Zunahme.

(c) Berechnen Sie den Minimalwert V_{min} des vom Gas eingenommenen Volumens.

Strategischer Lösungsvorschlag
Es ist ratsam, alle im Text und Schaubild gegebenen Informationen vorab zu dokumentieren.
In diesem Beispiel ist

- **Stoffmenge** $n = 10\ \text{mol}$ bleibt konstant, d.h. es geht kein Gas verloren und es handelt sich um ein abgeschlossenes System
- Arbeitsgas ist **zweiatomig**, d.h. nach dem Modell ,'starre Hantel‘ ist der Freiheitsgrad $f = 5$ und daraus sind die molaren isochoren/isobaren Wärmekapazitäten C_{mv} und C_{mp} sowie der Isentropenexponent κ bekannt
- Die Zustandsänderungen im Schaubild klassifizieren und mit den gegebenen Zustandsgrößen identifizieren
  $1 \to 2$ **isotherme** ZÄ, d.h. $T_1 = T_2 = T_{\text{max}}$
  $2 \to 3$ **isochore** ZÄ, d.h. $V_2 = V_3 = V_{\text{max}}$
  $3 \to 4$ **isotherme** ZÄ, d.h. $T_3 = T_4 \le T_{\text{max}}$, da diese Isotherme tiefer liegt
  $4 \to 1$ **isobare** ZÄ, d.h. $p_4 = p_1 = p_{\text{max}}$

Es ist sehr übersichtlich, diese Zustandsgrößen in einem Tableau darzustellen:

Zustand	**1**	**2**	**3**	**4**
Druck	p_{max}		p_{min}	p_{max}
Temperatur	T_{max}	T_{max}		
Volumen		V_{max}	V_{max}	
Stoffmenge	n	n	n	n

Sind drei Größen eines Zustands bekannt, so kann man mit Hilfe der Zustandsgleichung eines idealen Gases

$$pV = nR_{\text{m}}T$$

die fehlende vierte Größe bestimmt werden.
Durch Einsetzen der gegebenen Größen in die Zustandsgleichung eines idealen Gases, erhält man hier direkt V_1, p_2, T_3.

Mit Erhalt dieser Größen und unter Berücksichtigung der Zustandsänderungen folgt nun

Zustand	**1**	**2**	**3**	**4**
Druck	p_{max}	p_2	p_{min}	p_{max}
Temperatur	T_{max}	T_{max}	T_3	$T_4 = T_3$
Volumen	V_1	V_{max}	V_{max}	
Stoffmenge	n	n	n	n

Durch erneutes Einsetzen der nun gegebenen Größen in die Zustandsgleichung eines idealen Gases, erhält man hier direkt V_4.

Das Tableau ist nun komplett.

Zustand	**1**	**2**	**3**	**4**
Druck	p_{max}	p_2	p_{min}	p_{max}
Temperatur	T_{max}	T_{max}	T_3	$T_4 = T_3$
Volumen	V_1	V_{max}	V_{max}	V_4
Stoffmenge	n	n	n	n

Anmerkung:
Nicht immer sind durch die Informationen im Text drei der vier Zustandsgrößen bekannt, somit muss man mit Hilfe der Zustandsänderungen fehlende Größen bestimmen – die mathematisch komplizierteste Form wäre dabei die isentrope Zustandsänderung.

Die Zustandsänderungen zwischen zwei Zuständen A und E

- **isotherm** $p_A \cdot V_A = p_E \cdot V_E$
- **isochor** $\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_E}{T_E}$
- **isobar** $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_E}{T_E}$
- **isentrop** $p_A \cdot V_A{}^{\kappa} = p_E \cdot V_E{}^{\kappa}$
  $T_A \cdot V_A{}^{\kappa-1} = T_E \cdot V_E{}^{\kappa-1}$
  $p_A{}^{1-\kappa} \cdot T_A{}^{\kappa} = p_E{}^{1-\kappa} \cdot T_E{}^{\kappa}$

Sind nun alle Zustandsgrößen bekannt, so kann man sämtliche Energiebetrachtungen durchführen.

Hat man nicht alle Zustandsgrößen, so hilft der 1. Hauptsatz der Wärmelehre für eine Zustandsänderung:

$$U_{AE} = W_{AE} + Q_{AE}$$

Hierbei ist die **Änderung der Inneren Energie** unabhängig von der Art der Zustandsänderung (also egal ob isotherm, isochor, isobar, etc.) immer

$$U_{AE} = nC_{mv}(T_E - T_A),$$

man muss nur Anfangs- und Endtemperatur kennen. Diese energetische Größe ist also meist sehr einfach zu berechnen.

Laut Definition ist die **mechanische Arbeit**

$$W_{AE} = -\int_{V_A}^{V_E} p\, dV,$$

d.h. rein mathematisch gesehen bedeutet dies:
Es handelt sich hierbei um die (negative) Fläche unterhalb des *p,V*-Diagramms und man kann diese bei geradlinigen Begrenzungen elementar geometrisch berechnen - (Fläche von Dreieck, Rechteck, Trapez) und benötigt nicht die (mathematisch aufwendigere) Integration. Dies ist somit in manchen Fällen ebenfalls sehr einfach zu berechnen.

Die **übertragene Wärme** kann man damit mit Hilfe des 1. Hauptsatzes berechnen

$$Q_{AE} = U_{AE} - W_{AE}$$